

CORRECTION DE L'EXAMEN
D'ANALYSE NUMÉRIQUE I

22 janvier 2009 – DURÉE 2h00

Exercice 1

Considérons une suite de nombres entiers a_1, a_2, \dots, a_n avec $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i$. La moyenne arithmétique est donnée par la formule

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

Considérons aussi le calcul itératif

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_k &= \frac{k-1}{k} S_{k-1} + \frac{1}{k} a_k; k \geq 2 \end{aligned}$$

1. Montrer que les deux formules de calcul M_n et S_n sont équivalentes.

SOL.- On a $S_1 = a_1; S_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \Rightarrow 2S_2 = (a_1 + a_2); S_3 = \frac{2}{3}S_2 + \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \Rightarrow 3S_3 = (a_1 + a_2 + a_3)$, et donc

$$kS_k = (a_1 + \dots + a_k); k \geq 1$$

En utilisant cette relation, on a

$$(a) M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n} a_n = \frac{n-1}{n} S_{n-1} + \frac{1}{n} a_n = S_n, \text{ et}$$

$$(b) S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-1} + \frac{1}{n} a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n} a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = M_n$$

ce qui établit l'équivalence.

2. Supposons que nous travaillons avec un ordinateur qui utilise le standard IEEE 744, double précision. En établissant les algorithmes respectifs pour chacun de deux calculs, M_n et S_n , indiquer lequel de ces deux calculs est le plus précis. Justifier brièvement votre réponse.

SOL.- Algorithme pour M_n .

```

M_n ← a_1
for k ← 2 to n
  do
    M_n ← M_n + a_k
M_n ← M_n/n

```

Algorithme pour S_n

```

S_n ← a_1
for k ← 2 to n
  do
    S_n ← (k-1) × S_n/k + a_k/n

```

Le premier algorithme effectue $n - 1$ additions des nombres entiers, qui se font sans erreur de calcul, tandis que le second algorithme effectue $2(n - 1)$ divisions et $n - 1$ additions des nombres réels, chaque addition ayant une erreur de calcul. Par conséquent le premier algorithme est plus précis.

Exercice 2

Soit la formule

$$y = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$$

Écrire l'algorithme qui, sans modifier ou simplifier la formule, effectue le calcul et évalue la borne supérieure de l'erreur de calcul propagée par l'utilisation de cet algorithme.

SOL.- Les étapes de l'algorithme sont

1. $s \leftarrow 1 + x$
2. $r \leftarrow 1 - x$
3. $w \leftarrow s \times r$
4. $y \leftarrow 2/w$

Donc $r = 4$.

On a

$$1. x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(1)}(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1+x \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(1)}$$

$$2. x^{(1)} = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(2)}(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} s \\ 1-x \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(2)}$$

$$3. x^{(2)} = \begin{bmatrix} s \\ r \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(3)}(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} s \times r \\ 2 \end{bmatrix} = x^{(3)}$$

$$4. x^{(3)} = \begin{bmatrix} w \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \phi^{(4)}(x^{(3)}) = [2/w] = x^{(4)} = y$$

et donc $\phi = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}$.

Calcul de $\psi^{(k)}$ pour $k = 1, \dots, r - 1 = 3$. On a

$$\psi^{(1)} = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)}(x^{(1)}) = \frac{2}{s \cdot (1-x)}$$

$$\psi^{(2)} = \phi^{(4)} \circ \phi^{(3)}(x^{(2)}) = \frac{2}{s \cdot r}$$

$$\psi^{(3)} = \phi^{(4)}(x^{(3)}) = \frac{2}{w}$$

On calcule les jacobiens :

$$J[\phi(x)] = -\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$J[\psi^{(1)}(x^{(1)})] = \left[\frac{-2}{s^2(1-x)}, 0, \frac{2}{s(1-x)^2}, 0 \right]$$

$$J[\psi^{(2)}(x^{(2)})] = \left[\frac{-2}{s^2 r}, \frac{-2}{s r^2}, 0 \right]$$

$$J[\psi^{(3)}(x^{(3)})] = \left[\frac{-2}{w^2}, 0 \right]$$

On a $\Delta x = [\Delta x]$

Calcul des matrices \mathbf{H}_i

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_4 = [\eta_4]$$

Application de la formule (1.8.19) du poly :

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= J[\phi(x)] \Delta x + \sum_{k=1}^{r-1} J[\psi^{(k)}(x^{(k)})] \mathbf{H}_k x^{(3)} + \mathbf{H}_r y \\
 &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \Delta x + \left[\frac{-2}{(1+x)^2(1-x)}, 0, \frac{2}{(1+x)(1-x)^2}, 0 \right] \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x \\ 1 \\ x \\ 2 \end{bmatrix} + \\
 &\quad \left[\frac{-2}{(1+x)^2(1-x)}, \frac{-2}{(1+x)(1-x)^2}, 0 \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x \\ 1-x \\ 2 \end{bmatrix} + \\
 &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \Delta - \frac{2}{(1-x^2)} \left[\begin{array}{cc} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} (1+x) \times (1-x) \\ 2 \end{bmatrix} + [\eta_4] \frac{2}{(1+x)(1-x)} \\
 &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \Delta - \frac{2}{(1-x^2)} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \eta_4)
 \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$|\Delta y| \leq \frac{|2x|}{(1-x^2)^2} |\Delta x| + \frac{8}{|1-x^2|} \text{eps}$$

Exercice 3

On veut résoudre le système $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de \mathbf{A} sont 1 et 2001, les vecteurs propres : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement. On a donc la formule de diagonalisation

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \text{ avec } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'inverse de \mathbf{P} .

$$\text{SOL. } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer $\|\mathbf{A}\|_2$.

SOL.- D'après les propriétés de la norme 2 on a

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$$

De la symétrie de \mathbf{A} , on déduit

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^2)}$$

Or les valeurs propres de \mathbf{A}^2 sont les carrés des valeurs propres de \mathbf{A} donc

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) = 2001$$

3. On considère la matrice inverse \mathbf{A}^{-1} de \mathbf{A} .

(a) Montrer, sans calculer \mathbf{A}^{-1} que $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 1$.

Indication.- Utiliser le fait que les valeurs propres de l'inverse d'une matrice sont les inverses des valeurs propres de la matrice.

SOL.- La matrice \mathbf{A} est symétrique donc son inverse l'est aussi. On déduit donc comme précédemment que

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{A}^{-1})} = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{-1})} = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^{-1})^2} = \rho(\mathbf{A}^{-1})$$

Les valeurs propres de \mathbf{A}^{-1} sont les inverses des valeurs propres de \mathbf{A} donc la plus grande valeur propre de \mathbf{A}^{-1} est l'inverse de la plus petite valeur propre de \mathbf{A} , d'où

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 1$$

(b) Vérifier, en utilisant la diagonalisation de la matrice inverse \mathbf{A}^{-1} que votre calcul est exact.

SOL.- On peut le vérifier : de $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$ on déduit $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1/2001 \begin{pmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{pmatrix}$ sont encore 1 et 2001.

4. Expliciter les solutions du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en utilisant la diagonalisation ci-dessus.

SOL.-

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2001(x_1 + x_2) = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2001x_1 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 1/2001 \end{aligned}$$

5. On effectue une erreur sur le second membre b et on résout à la place de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$, avec

$$\mathbf{\Delta b} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On trouve } \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 4.852 \cdot 10^{-17} \end{pmatrix}.$$

Indications : On donne $1/2001 = 0.0004998$, $\sqrt{2} \simeq 1.4$, $\sqrt{2}/2001 \simeq 0.0007068$ et $2001/\sqrt{2} \simeq 1414.9207$.

(a) Déterminer l'erreur $\Delta \mathbf{x}$ commise sur \mathbf{x} .

$$\text{SOL.- } \Delta \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 4.852 \cdot 10^{-17} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.0004998 \\ 0.0004998 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0005002 \\ -0.0004998 \end{pmatrix}$$

(b) Estimer $\|\Delta \mathbf{x}\|_2$.

$$\text{SOL.- } \Delta \mathbf{x} \simeq 5.10^{-4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \|\Delta \mathbf{x}\|_2 \simeq \sqrt{2} \cdot 5.10^{-4} \simeq 7.10^{-4}$$

(c) L'erreur relative $\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$ aurait-elle pu être plus importante pour une autre valeur de $\Delta \mathbf{b}$?

SOL.- On sait que l'on a la majoration

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$$

Ici on a $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 2001$. D'autre part $\|\Delta \mathbf{b}\|_2 = \sqrt{1 + 10^{-6}} \simeq 1$ et $\|\mathbf{b}\|_2 = \sqrt{2}$ donc la borne supérieure est environ $2001/\sqrt{2} \simeq 1415$.

Par ailleurs

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{2}/2001 \simeq 7.10^{-4}$$

Donc

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \simeq 1$$

(On a en fait une valeur de 1.0005001). La réponse est donc : oui, l'erreur relative aurait pu être plus importante.

6. Pour résoudre le système on peut aussi appliquer la méthode itérative simple de Jacobi. Prenons comme vecteur initial $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^\top$.

Calculer, en utilisant la formule du calcul itératif de Jacobi, le vecteur $\mathbf{x}(1)$.

SOL.- En appliquant l'itération de Jacobi

$$\mathbf{x}(k) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b},$$

on trouve

$$\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 0.999001 \\ 0.999001 \end{pmatrix}.$$