Ex 1.

1) La distribution des probabilités est

	G	A
P	30/31	1/31

G = gain , A = amende

1.1. L'information associée au gain

$$h(G) = -\log_2(P[G]) = -\log\left(\frac{30}{31}\right)$$

1.2. $h(A) = -\log_2(P[A]) = -\log_2(1/31)$

1.3. L'entropie est l'information moyenne

$$H = \frac{30}{31} h(G) + \frac{1}{31} h(A) = -\frac{30}{31}\log_2\left(\frac{30}{31}\right) - \frac{1}{31}\log_2\left(\frac{1}{31}\right)$$

$$\approx 0.2$$

1.4 L'entropie maximale correspond à la distribution de probabilité uniforme

$$\max_{p\in[0,1]} H_2(p) = H(0.5) = 1$$

2) Pour la distribution donnée l'entropie est

$$H = -2\cdot 0.4\log_2(0.4) - 2\cdot 0.1\cdot\log_2(0.1) \approx 1.72$$

Ex. 2

X	a	b	c	d	e	f
P_x	0.25	0.15	0.1	0.35	0.1	0.05

1. Entropie $H \cong 2,15$
2. La borne inf de longueur moyenne des mots de code est $H \cong 2,15$.

   Il n'existe pas ici de code absolument optimal car il y a des probabilités qui ne sont pas des puissances entières de $\left(\frac{1}{2}\right)$
3. Construction du code de Huffman

s_i	p_i	s_i	p_i	s_i	p_i	s_i	p_i	s_i	p_i
d	0.35	d	0.35	d	0.35	efcb	0.4	ad	0.6
a	0.25	a	0.25	a	0.25	d	0.35	efcb	0.4
b	0.15	b	0.15	efc	0.25	a	0.25		
c	0.1	ef	0.15	b	0.15				
e	0.1	c	0.1						
f	0.05								

Arbre

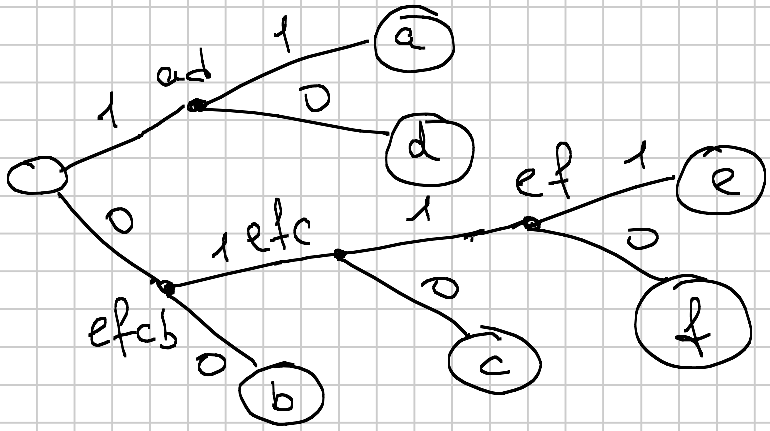

Table de code

s_i	a	b	c	d	e	f
m_i	10	00	010	11	0111	0110
l_i	2	2	3	2	4	4
p_i	0,25	0.15	0.1	0.35	0.1	0.05

4) Longueur moyenne : $\bar{l} = 0.25 \times 2 + 0.15 \cdot 2 + 0.1 \times 3 + 0.35 \cdot 2 + 0.1 \cdot 4 + 0.05 \cdot 4 = 2,4$

Exercice 3

1) Calcul des matrices

X \ Y	0	-1	1	P_X
0	0.8p	0.2p	0	p
1				
P_Y	0.8 p	0.2	0.8(1-p)	

P_X $P(X,Y)$ P_Y

X \ Y			
0	0.8	0.2	0
1			

$P(Y|X)$

X \ Y	0	-1	1
0	1	p	0
1	0	1-p	1

$P(X|Y)$

Formules utilisées :

$$p(x_i, y_j) = p(y_j | x_i) \cdot p(x_i)$$

$$p(y_j) = \sum_{x_i} p(x_i, y_j) \qquad p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

Résultats :

$$P(X,Y) = \begin{pmatrix} 0.8p & 0.2p & 0 \\ 0 & 0.2(1-p) & 0.8(1-p) \end{pmatrix}$$

P_Y :

Y	0	-1	1
P_Y	0.8p	0.2	0.8(1-p)

$$P(X|Y) = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$$

2. $H(x) = -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$

3) $H(X/Y) = -\sum_{i,j} p(x_i, y_j) \log_2 \left(p\left(x_i / y_j\right)\right) =$

$= -0.8p\log_2(1) - 0.2p\log_2(p) - 0.2(1-p)\log_2(1-p) - 0.8(1-p)\log_2(1)$

$= -0.8\left(p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)\right) = 0.2H(X)$

4) $I(X;Y) = H(x) - H(x/Y) = 0.8H(x)$

5) $C = \max_p I(X;Y) = \max_p 0.8H(x) = 0.8$

car $\max_p H(x) = H(0.5) = 1.$

Ex 4

1

a) $n = 3$ $\quad A = \{a, b, c\}$

Il y a $n! = 3! = 6$ permutations

$\Rightarrow H = \log_2(6) \approx 2{,}58$

b) Voici le tableau de distrib. du nb. de comparaisons

	abc	cab	acb	cba	bca	bac
nb	3	2	3	2	3	3
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$\Rightarrow$ Nb. moyen $= \dfrac{3+2+3+2+3+3}{6} \approx 2{,}66$

c) La borne inf est ici l'entropie $H \approx 2{,}58$

2

a) Il y a $n!$ permutations équiprobables $\Rightarrow$

$$H = \log_2 n!$$

b) $H = \log_2 n!$

c) $$C_p \geq C_c = H \approx \log_2\left(\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \sim$$

$$\sim \log_2\left(n^n \cdot e^{-n}\right) \sim n\log_2 n - n\log_2 e$$