

Cartouche du document

Année : ING 1

Activité : Travail dirigé

Objectifs

Aborder les langages et grammaires hors contexte et automates d'états finis à pile.

Un langage hors contexte est aussi appelé langage algébrique

Une grammaire hors contexte est un quadruplet T, N, S, P où :

- T est l'ensemble des éléments terminaux.
- N est l'ensemble des éléments non terminaux.
- S est l'élément non terminal initial
- P est l'ensemble de règles où toute règle de P est de la forme $X \rightarrow Y / X \in N$ et $Y \in (N \cup T)^*$

Sommaire des exercices

- 1 - Exemples de langages algébriques
- 2 - Automates à pile et langages algébriques

Corps des exercices

1 - Exemples de langages algébriques

Énoncé :

Dans ce qui suit, le caractère * désigne n'importe quelle puissance éventuellement nulle.

Question 1)

Énoncé de la question

Montrer que $L_1 = \{ a^*b \}$ est un langage algébrique.

Solution de la question

Le fichier *aEtoileb.gra*.

Question 2)

Énoncé de la question

Montrer que $L_2 = \{ a^n b^n / n \in \mathbb{N} \}$ est un langage algébrique.

Solution de la question

Le fichier *anbn.gra*.

Question 3)

Enoncé de la question

Montrer que $L_3 = \{ a^n b^p / n > p \text{ où } (p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$ est un langage algébrique.

Solution de la question

Le fichier *anbpnpgp.gra*.

Question 4)

Enoncé de la question

Montrer que $L_4 = \{ a^n b^p / n \text{ différent de } p \text{ où } (p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$ est un langage algébrique.

Solution de la question

Le fichier *anbpndiffp.gra*.

Question 5)

Enoncé de la question

Montrer que $L_5 = \{ a^n b^* c^n d^* / n \geq 0 \} \cup \{ a^* b^n c^* d^n / n \geq 0 \}$ est un langage algébrique.

Solution de la question

Question 6)

Enoncé de la question

Montrer que $L_6 = \{ a^n b^p c^q / n, q \geq 0, p \geq (n+q) \}$ est un langage algébrique.

Solution de la question

Question 7)

Enoncé de la question

Montrer que $L_7 = \{ a^n b^p / n \text{ différent de } p+2 \}$ est un langage algébrique.

Solution de la question

Question 8)

Enoncé de la question

Montrer que $L_8 = \{ a^n b^p / n \geq 0 \text{ et } 2n \geq p \geq n \}$ est un langage algébrique.

Solution de la question

2 - Automates à pile et langages algébriques

Enoncé :

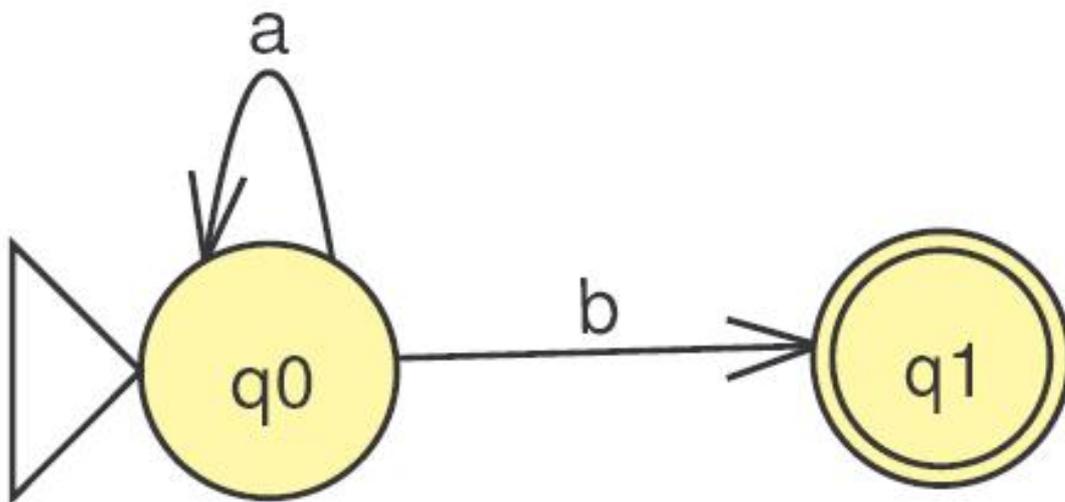
Dans ce qui suit, le caractère * désigne n'importe quelle puissance éventuellement nulle.

Question 1)

Enoncé de la question

Trouver l'automate à pile du langage algébrique $L_1 = \{ a^* b \}$.

Solution de la question

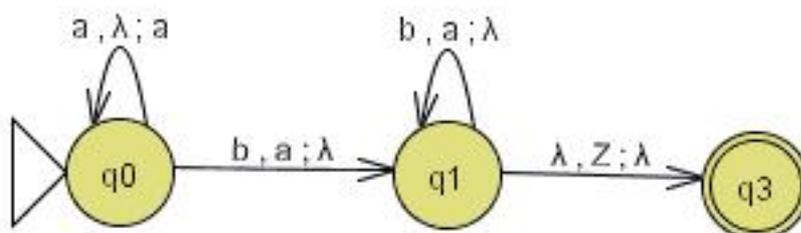


Question 2)

Enoncé de la question

Trouver l'automate à pile du langage algébrique $L_2 = \{ a^n b^n / n \in \mathbb{N} \}$.

Solution de la question



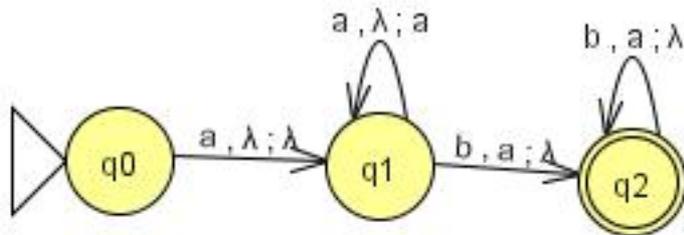
Z est le symbole que l'on met dans la pile à l'initialisation.

Question 3)

Enoncé de la question

Trouver l'automate à pile du langage algébrique $L_3 = \{ a^n b^p / n > p \text{ où } (p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$.

Solution de la question



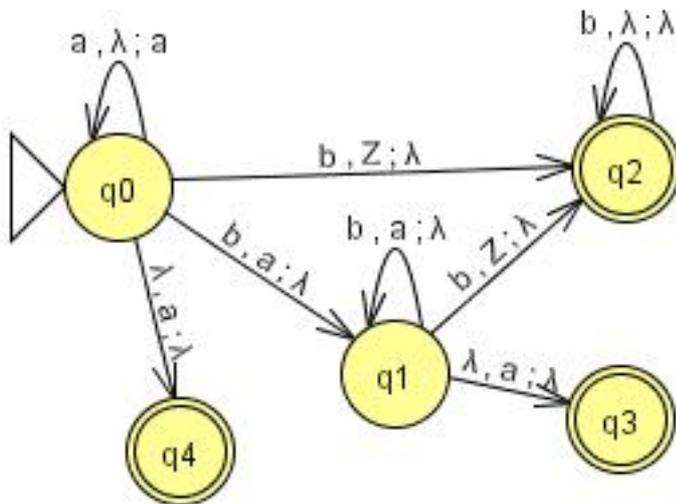
La première transition sert à compter au moins un a de plus que de b.

Question 4)

Enoncé de la question

Trouver l'automate à pile du langage algébrique $L_4 = \{ a^n b^p / n \text{ différent de } p \text{ où } (p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \}$.

Solution de la question



La transition de q_0 vers q_4 permet de traiter le cas où le mot n'est formé que de a.

La transition de q_0 vers q_2 permet de traiter le cas où le mot n'est formé que de b.

Question 5)

Enoncé de la question

Trouver l'automate à pile du langage algébrique $L_5 = \{ a^n b^* c^n d^* / n \geq 0 \} \cup \{ a^* b^n c^* d^n / n \geq 0 \}$.

Solution de la question

Question 6)

Enoncé de la question

Trouver l'automate à pile du langage algébrique $L_6 = \{ a^n b^p c^q / n, q \geq 0, p = (n+q) \}$.

Solution de la question

Question 7)

Enoncé de la question

Trouver l'automate à pile du langage algébrique $L_7 = \{ a^n b^p / n \text{ différent de } p+2 \}$.

Solution de la question

Question 8)

Enoncé de la question

Trouver l'automate à pile du langage algébrique $L_8 = \{ a^n b^p / n \geq 0 \text{ et } n \leq p \leq 2n \}$.

Solution de la question

Annexes (Arel)

// La grammaire de notre petit langage $a^* b$

// Cette grammaire est non seulement algébrique et même rationnelle

Les terminaux : $T = \{ a, b \}$

Les non terminaux : $N = \{ S \}$

L'axiome : $S = S$

Règles de production : $P = \{$

Règle : $S \rightarrow b$

Règle : $S \rightarrow a S$

$\}$

// La grammaire de notre petit langage $a^n b^n$

// Cette grammaire est bien algébrique mais pas rationnelle

Les terminaux : $T = \{ a, b \}$

Les non terminaux : $N = \{ S \}$

L'axiome : $S = S$

Règles de production : $P = \{$

Règle : $S \rightarrow \text{epsilon}$

Règle : $S \rightarrow a S b$

}

// La grammaire de notre petit langage $a^n b^p$

// avec $n > p$

// Cette grammaire est bien algébrique mais pas rationnelle

Les terminaux : $T = \{ a, b \}$

Les non terminaux : $N = \{ S, A, AB \}$

L'axiome : $S = S$

Règles de production : $P = \{$

// les mots de type A ne contiennent que des a et au moins 1

Règle : $A \rightarrow a$

Règle : $A \rightarrow aA$

// le mots de type AB contiennent autant de a que de b

Règle : $AB \rightarrow \text{epsilon}$

Règle : $AB \rightarrow a AB b$

// les mots de notre langage

Règle : $S \rightarrow A AB$

}

// La grammaire de notre petit langage $a^n b^p$

// avec n différent de p

// Cette grammaire est bien algébrique mais pas rationnelle

Les terminaux : $T = \{ a, b \}$

Les non terminaux : $N = \{ S, A, AB \}$

L'axiome : $S = S$

Règles de production : $P = \{$

// les mots de type A ne contiennent que des a et au moins 1

Règle : $A \rightarrow a$

Règle : $A \rightarrow a A$

// les mots de type B ne contiennent que des b et au moins 1

Règle : $B \rightarrow b$

Règle : $B \rightarrow b B$

// le mots de type AB contiennent autant de a que de b

Règle : $AB \rightarrow \text{epsilon}$

Règle : $AB \rightarrow a AB b$

// les mots de notre langage

Règle : $S \rightarrow A AB$

Règle : $S \rightarrow AB B$

}