

## Cartouche du document

Année : ING 1

Matière : Théorie des langages

Activité : Travail dirigé

## Objectifs

Ce travail dirigé a pour but de finaliser l'étude des automates à travers les quotients gauches.

Les points abordés seront :

- Génération d'un automate minimal engendrant un langage donné
- Détermination d'un langage engendré par un automate donné

## Sommaire des exercices

1 - Langage versus Automate minimal

2 - Automate versus Langage

## Corps des exercices

### 1 - Langage versus Automate minimal

**Enoncé :**

Dans cet exercice, on cherche des automates minimaux associés à des langages donnés.

#### Question 1)

Enoncé de la question

Soit l'alphabet  $A = \{a, b\}$ . Calculer l'automate des quotients gauche du langage  $L = a^*b^*$

Solution de la question

**Etape 0**

$$L_0 = \varepsilon^{-1} L = L$$

**Etape 1**

$$a^{-1} L_0 = a^{-1} (a^*b^*)$$

$$a^{-1} L_0 = a^{-1} (a^+b^*) \cup a^{-1} (\varepsilon b^*)$$

$$a^{-1} L_0 = a^{-1} (a a^*b^*) \cup \emptyset$$

$$a^{-1} L_0 = a^*b^*$$

$$a^{-1} L_0 = L_0$$

$$b^{-1} L_0 = b^{-1} (a^* b^*)$$

$$b^{-1} L_0 = b^{-1} (a^+ b^*) \cup b^{-1} (\epsilon b^*)$$

$$b^{-1} L_0 = \emptyset \cup b^{-1} (b^+) \cup b^{-1} (\epsilon)$$

$$b^{-1} L_0 = \emptyset \cup b^{-1} (b b^*) \cup \emptyset$$

$$b^{-1} L_0 = b^* = L_1$$

### Etape 2

$$a^{-1} L_1 = a^{-1} (b^*) = \emptyset = L_2$$

$$b^{-1} L_1 = b^{-1} (b^*)$$

$$b^{-1} L_1 = b^{-1} (b^+) \cup b^{-1} (\epsilon)$$

$$b^{-1} L_1 = b^{-1} (b b^*) \cup \emptyset$$

$$b^{-1} L_1 = b^* = L_1.$$

### Etape 3

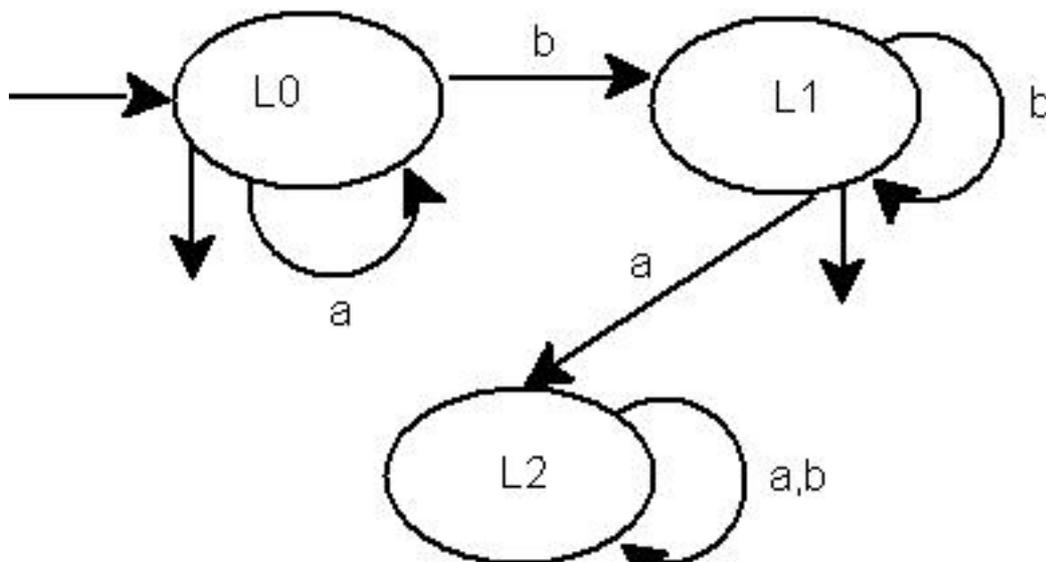
Le quotient gauche de l'ensemble  $\emptyset$  par n'importe quel mot est bien sûr l'ensemble  $\emptyset$ .

On a donc :

- $a^{-1} L_2 = L_2$
- $b^{-1} L_2 = L_2$

Les ensembles  $L_0$  et  $L_1$  contiennent le mot  $\epsilon$ . Ils sont donc des états finaux.

L'automate des quotients gauches est donc :



## Question 2)

### Enoncé de la question

Soit l'alphabet  $A = \{a, \dots, z\}$ . Calculer l'automate des quotients gauche du langage  $L$  défini par tous les mots se terminant par 'man'.

### Solution de la question

## 2 - Automate versus Langage

### Enoncé :

Dans cet exercice, on cherche les langages engendré par un automate par résolution de système d'équation et en utilisant le **lemme d'Arden** ( Soit  $A$  un alphabet,  $X$ ,  $B$  et  $C$  trois langages définis sur  $A^*$  .

La solution de l'équation  $X = B X + C$  est :

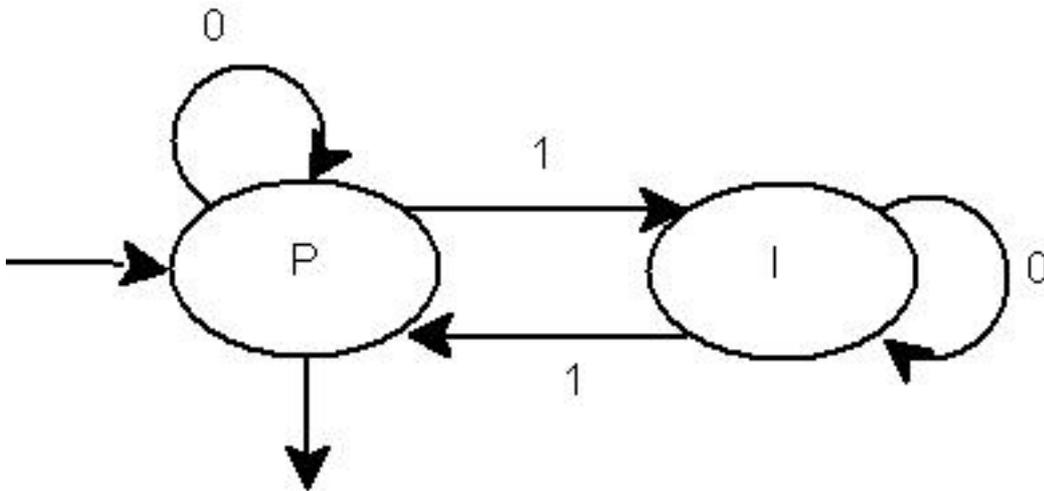
- $X = B^* C$  si  $\epsilon$  n'appartient pas à  $B$
- $X = B^+ C$  si  $\epsilon$  appartient à  $B$

).

## Question 1)

### Enoncé de la question

Trouver le langage engendré par l'automate qui suit



par la résolution du système d'équation associé.

### Solution de la question

Le système d'équations de cet automate est :

$$(1) X_p = 0 X_p + 1 X_1 + \text{epsilon}$$

$$(2) X_1 = 0 X_1 + 1 X_p$$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (2), on en déduit

$$X_1 = 0^* 1 X_p$$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

$$X_p = (0 + 1 0^* 1) X_p + \text{epsilon}$$

En appliquant le lemme d'Arden à cette nouvelle équation), on en déduit

$$X_p = (0 + 1 0^* 1)^* \text{epsilon}$$

$$X_p = (0 + 1 0^* 1)^*$$

## Question 2)

### Enoncé de la question

Calculer le langage engendré par l'automate trouvé dans la question 1 de l'exercice précédent ( $L = \{a^* b^*\}$ ).

### Solution de la question

Le système d'équations de l'automate précédent est :

$$(1) X_0 = a X_0 + b X_1 + \epsilon$$

$$(2) X_1 = b X_1 + a X_2 + \epsilon$$

$$(3) X_2 = \{a,b\} X_2$$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (3), on obtient :

$$X_2 = \{a,b\}^* \emptyset = \emptyset$$

En remplaçant  $X_2$  par sa valeur dans l'équation (2), on obtient :

$$X_1 = b X_1 + a \emptyset + \epsilon$$

$$X_1 = b X_1 + \epsilon$$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (2), on obtient :

$$X_1 = b^* \epsilon = b^*$$

En remplaçant  $X_1$  par sa valeur dans l'équation (1), on obtient :

$$X_0 = a X_0 + b^+ + \epsilon$$

$$X_0 = a X_0 + b^*$$

En appliquant le lemme d'Arden à l'équation (1), on obtient :

$$X_0 = a^* b^*$$

### Question 3)

#### Enoncé de la question

Calculer le langage engendré par l'automate trouvé dans la question 2 de l'exercice précédent ( $L = \{\text{tous les mots qui se terminent par man}\}$ ).

#### Solution de la question