

## Cartouche du document

Année : ING 1

Matière : Théorie des langages

Activité : Examen

## Objectifs

Cet examen porte sur :

- les grammaires régulières et hors contexte
- Les automates finis déterministes ou non
- Langages rationnels : Les quotients gauches et les systèmes d'équations des automates
- Langages algébriques : L'algorithme de CKY et les automates à pile
- Les machines de Turing

Tous les documents sont autorisés

Durée : 2H00 heures

Les ordinateurs sont autorisés mais seulement en fonctionnement local.

**Vous devez rendre des copies papiers**

## Sommaire des exercices

- 1 - Langages et automates
- 2 - Langages hors contexte
- 3 - Machines de Turing
- 4 - Un peu de réflexion

## Corps des exercices

### 1 - Langages et automates

**Enoncé :**

Soit le langage des chaînes de **a** et de **b** tel que toutes les occurrences de **b** soient de longueur **1**. Les chaînes comme **baabaaaa**, **aaaab** et **b** appartiennent au langage.

#### Question 1)

Enoncé de la question

Définir une expression régulière de ce langage en utilisant les opérateurs suivants:

- répétition d'un symbole : \*, +
- opérateur d'union : |
- opérateurs de concaténation : ., (, )

Exemple  $a^+ . b(a|b)^*$

### Question 2)

Énoncé de la question

Trouver l'automate minimal associé à ce langage par la méthode des quotients gauches.

### Question 3)

Énoncé de la question

Donner le système d'équations correspondant à cet automate.

### Question 4)

Énoncé de la question

Utiliser le lemme d'Arden afin de vérifier que le langage obtenu par résolution du système d'équation correspond bien à celui trouvé lors de la première question.

## 2 - Langages hors contexte

Énoncé :

On considère la grammaire suivante :

```
// La grammaire de notre petit langage  $a^n b^n$  avec  $n > 0$ 
// Cette grammaire est bien algébrique mais pas rationnelle
Les terminaux :  $T = \{ a, b \}$ 

Les non terminaux :  $N = \{ S \}$ 

L'axiome :  $S = S$ 

Règles de production :  $P = \{$ 
  Règle :  $S \rightarrow a b$ 
  Règle :  $S \rightarrow a S b$ 
   $\}$ 
```

### Question 1)

Énoncé de la question

Montrer que la grammaire qui suit est une normalisation au sens de Chomsky de la grammaire ci-dessus.

```
// La grammaire de notre petit langage  $a^n b^n$  avec  $n > 0$ 
// Cette grammaire est normalisée au sens de Chomsky
Les terminaux :  $T = \{ a, b \}$ 

Les non terminaux :  $N = \{ S, V, B, A \}$ 
```

**L'axiome :  $S = S$**

**Règles de production :  $P = \{$**

**Règle :  $A \rightarrow a$**

**Règle :  $B \rightarrow b$**

**Règle :  $V \rightarrow S B$**

**Règle :  $S \rightarrow A B$**

**Règle :  $S \rightarrow A V$**

**$\}$**

### Question 2)

#### Enoncé de la question

Avec la grammaire normalisée au sens de Chomsky ci-dessus, on a appliqué l'algorithme de CKY à la chaîne **a a a b b b**.

On trouve le tableau suivant :

Le mot	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6
a	A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	?	?
a	A	$\emptyset$	$\emptyset$	S	?	--
a	A	S	V	$\emptyset$	--	--
b	B	$\emptyset$	$\emptyset$	--	--	--
b	B	$\emptyset$	--	--	--	--
b	B	--	--	--	--	--

La colonne  $Etape_j$  représente les sous mots de longueur  $j$ . La ligne  $L_i$  représente la position du sous mot dans le mot initial. En résumé, dans la case  $(i,j)$  on s'intéresse au sous mot de longueur  $j$  extrait du mot initial à partir du symbole  $i$ .

- 1) Compléter le tableau pour finir l'application de l'algorithme de CKY
- 2) Qu'est ce qui indique dans ce tableau complété que la chaîne  $a^n b^n$  appartient au langage ?
- 3) Dans notre cas que signifie de trouver l'axiome S dans la case (3,2) ?

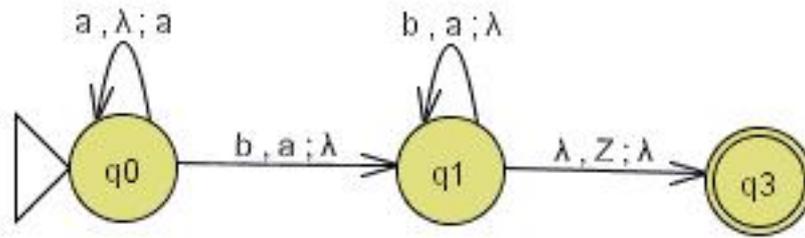
### Question 3)

#### Enoncé de la question

On considère le langage  $(a^n b^n)^*$ .

Définir un automate à pile qui reconnaît ce langage.

On vous redonne l'automate à pile du langage  $a^n b^n$ .



### 3 - Machines de Turing

#### Question 1)

Enoncé de la question

Ecrire une machine de Turing qui calcule (écrit sur la bande) le nombre  $2 * X + 1$  à partir du nombre  $X$  codé en binaire.

### 4 - Un peu de réflexion

#### Question 1)

Enoncé de la question

Sachant que dans un ordinateur, l'enregistrement du code se fait par le même encodage que les données et sur un même support.

Quelle est parmi les trois propositions suivantes celle qui modélise le mieux un ordinateur :

- un automate à états finis
- un automate à pile
- une machine de Turing

Justifier votre réponse.