TD 3: théorie des graphes

Coloriage de Graphes

par Damien SICHAUMETTE

Exercice 1 :

Soit une configuration de produits chimiques non transportables ensembles modélisée par le graphe suivant :

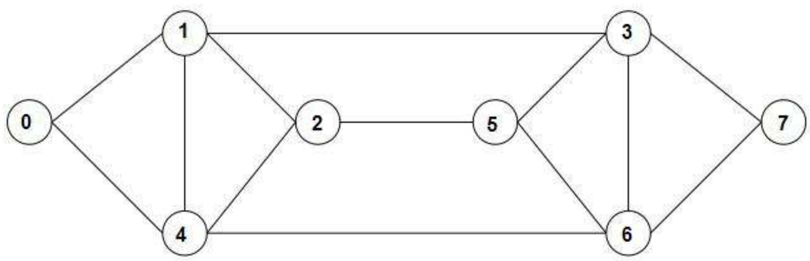


FIG. 1 – Produits chimiques à ne pas mélanger

Déterminer le nombre de camions nécessaires pour transporter l'ensemble des produits par l'algorithme glouton.

degré 4 : 1 - 3 - 4 - 6

degré 3: 2 - 5

degré 2: 0 - 7

l'algorithme glouton donne k=4

Chaque couleur représente un camion:

couleur A: 1 - 6

couleur B: 3 - 4

couleur C: 2 - 0 - 7

couleur D: 5

Peut-on faire mieux?

l'indice chromatique est de 3 donc on peut utilisé juste 3 camion si on optimise o na:

C_1: 0,2,3

C2: 4,5,7

C3: 1,6

Exercice 3 :

Montrer que dans toute soirée de 6 personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas deux à deux

On construit un graphe complet contenant 6 sommets. Un sommet correspond à une personne.

Une arête entre deux sommet signifie que les deux personnes se rencontrent dans la soirée.

Nous colorons les arêtes avec deux couleurs:

Bleu: Les deux personnes se connaissent.

Rouge: Les deux personnes ne se connaissent pas.

On se pose la question si le graphe contient des triangles bleus ou rouges.

si une arête des trois est bleue

.

.

.

.

Exercice 4 :

Un pays possède 2009 aéroports. Dans tout groupe de trois aéroports, au moins deux ne sont pas reliés par un vol direct (aller-retour). Quel est le nombre maximum de vols directs dans ce pays.

Application du théorème de Turan:

On construit le graphe dont les sommets sont les aéroports (n=2009). Une arête entre deux aéroports corrrespond à un vol direct.

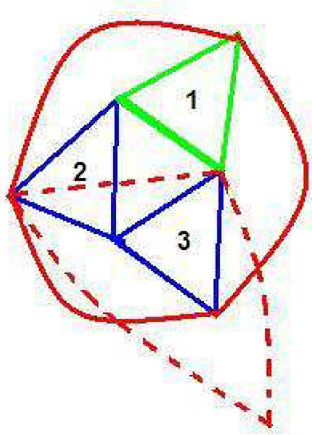
Nb d'arête = $\frac{n^2}{4} = \frac{(2009)^2}{4} \simeq 1\,\text{million}$

Exercice 5 :

Des étudiants ont passé n examens, n = 3. Pour chaque matière, exactement 3 étudiants ont eu la meilleur note, et pour deux matières différentes, un seul étudiant a eu la meilleur note dans ces deux matières. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle ces conditions impliquent qu'un même étudiant ait eu la meilleur note dans chacune des matières.

Nous construisons un graphe dont les sommets sont les élèves. Une arête entre deux sommets signifie que les deux élèves ont eu la meilleur note dans une matière dinnée.

Ce graphe est composé de K triangles. un triangle corr確spond à une matière (à une couleur donnée). Deux triangles ont obligatoirement un sommet en commun.



Déterminer K à partir duquel tous les triangles ont un sommet commun.

on étudie différent cas géométrique pour démontré ceci.

on trouve $k \geqslant 8$

(1) 4 triangles ont un sommet commun, tout autres triangles partagent ce sommet avec les autres triangles. (principe de tiroir: si un tiroir est remplis, i lfaut en ouvrir un autre ;-))

a) démontrer que si $k \geqslant 8$ alors on tombe sur la situation (1)

Si $k \geqslant 8$ un triangle A a des sommets en commun avec 7 autres triangles (au moins).

Un des sommets de A est commun entre au moins 4 triangles.

Selon (1) tous les triangles partagent ce sommet

b) trouver un contre exemple pour $k \geqslant 7$

Soit l'ensemble des matières {1,2,3,4,5,6,7} et l'ensemble des élèves {A,B,C,D,E,F,G}

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	*X*	*X*	*X*				
2	*X*			*X*	*X*		
3		*X*		*X*		*X*	
4			*X*	*X*			*X*
5	*X*					*X*	*X*
6		*X*			*X*		*X*
7			*X*	*X*	*X*		

$n = 7$ donc nb d'arête $= \frac{n \times (n-1)}{2} = 21 \quad \Rightarrow \quad 7$ triangles !!

Exercice 6 :

Rappel:

Soit G un graphe contenant n sommets, on dispose de 4 couleurs pour colorier les sommets. On démontre que le nombre de coloration différentes de G est un polynome d'ordre n

$\mathrm{AK}^n + \mathrm{BK}^{n-1} + \mathrm{CK}^{n-2} + \ldots$

Montrer que le polynôme chromatique d'un arbre vaut $P(k) = k(k-1)^{n-1}$

A: un arbre (un graphe connexe sans cycle)

Supposons que le polynôme est valable jusqu'à $(n-1)$ on à alors : $\underset{n-1}{P}(k) = k(k-1)^{n-2}$

Soit A un arbre de taille n, il existe dans A un sommet pendant x_0, $d(x_0) = 1$

Soit e l'arête inscidente à x_0

alors $(A-e)$ admet $\underset{n-1}{P}(k)$ colorations.

Pour chaque coloration de $(A-e)$, il existe un $(k-1)$ coloration de x_0

$\underset{n}{P}(k) = \underset{n-1}{P}(k) \times (k-1) = k(k-1)^{n-1}$