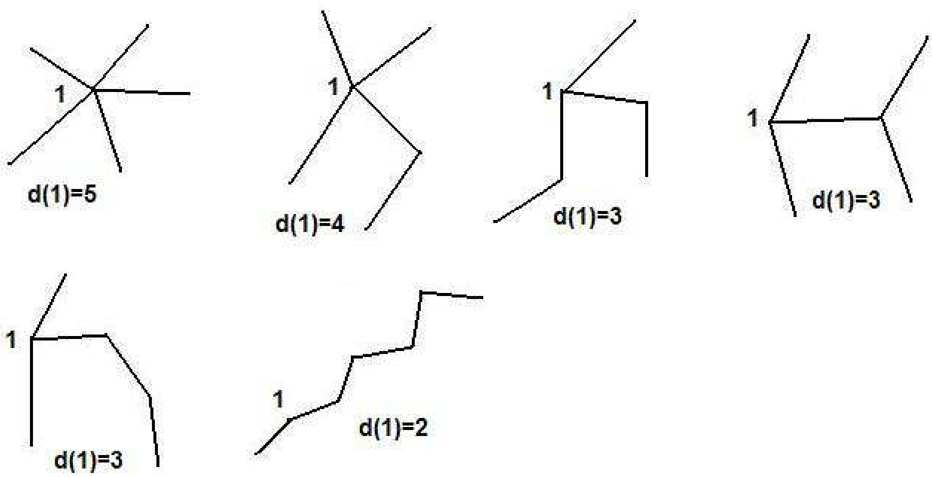
TD 2 Théorie des Graphes

Les arbres

par Damien SICHAUMETTE

Exercice1:

Voici tous les arbres ayant six sommets:



Exercice2:

Soit x_i le sommet ayant le degré maximum Δ.

Soit e_{ik} une arête incidente à x_i $\;e_{\text{ik}}\,\epsilon\,\{\,e_{(1)}, e_{(2)}, \ldots . e_{(i)}\}$

Soit C la chaine la plus longue qui commence à x_i , e_{ik} $C = \{\,x_i, e_{\text{ik}}, \ldots ., e_j, x_j\}$ Démontrons que x_j est pendant (de degré 1)

Si x_j n'est pas pendant alors il existe $f <> e_j$ telle que f soit incidente à x_j

Soit y l'autre extrémité de f.

1) $y \epsilon C$, alors il existe un cycle dans l'autre!!

2) $y \epsilon / C$, $C' = \{\,x_i, e_{\text{ik}}, \ldots ., e_j, x_j, f, y\}$ la chaine C' est plus longue que C!!

Remarque: Deux chaines pendant de x_i et traversant deux arêtes différentes e_{ik}, e'_{ik} sont disjoints ; Sinon on obtient un cycle dans l'arbre.

Donc , il existe certainement Δ sommets pendant différents.

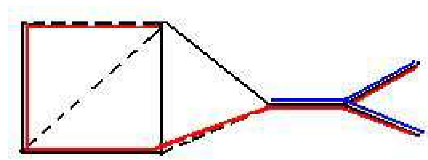
Exercice3:

Voir le théorème 1 du cours.

Pour le démontré on à déja démontré dans le cours: $1 \Rightarrow 2$, $1 \Rightarrow 3$, $1 \Rightarrow 4$, $1 \Rightarrow 5$, $3 \Rightarrow 1$, $4 \Rightarrow 1$

Il reste donc plus qu'à démontrer: $5 \Rightarrow 1$ et $2 \Rightarrow 1$

Exercice4:



En rouge l'arbre T' , en noir le graphe G et I l'arbre bleu. les arêtes effacé sont les arêtes isthmes du graphe G.

rappel: Un arbre couvrant est un graphe partiel qui n'a pas de cycle.

1) Démontrons que toutes arêtes isthme de G appartient à tout arbre couvrant de G:

Soit e une arête isthme de G. Soit T un arbre couvrant qui ne contient pas e.

Alors selon la proposition IX $T + e$ contient un cycle, mais selon le lemme 1 e étant un isthme, e ne peut appartenir à un cycle. Donc contradiction.

Donc il n'existe pas un arbre couvrant T qui ne contient pas e.

Si e est une arête appartenant à tous les arbres couvrant, alors e est une arête isthme dans le graphe G. (attention: pas pareil que dans l'arbre)

Supposons que e est non isthmedans G, selon l proposition VI qui décrit la construction d'un arbre à partir de G; il est possible de retirer e dès le début de G etc... Le graphe résultant T serai un arbre couvrant qui ne contient pas e. Donc contradiction, donc e est isthme!!!

2) Démontrons que e n'appartient à aucun arbre couvrant si et seulement si e est une boucle de G.

Une boucle e ne peut pas appartenir à un arbre couvrant T. (sinon T contiendrai un cycle et un arbre ne peu contenir de cycle)

Démontrons de plus que si il existe une arête qui n'appartient à aucun arbre couvrant , alors e est une boucle.

(cf. cours lemme de l'échange)

Supposons que e n'est pas une boucle. Soit T un arbre couvrant, selon le lemme de l'échange, $T + e - f$ est un arbre couvrant (f est une arête appartenant au cycle $T + e$)

Donc e appartient à un arbre couvrant.