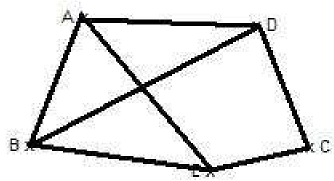
$\boxed{\text{TD n}^{\text{o}}\text{1 Théorie des graphes}}$

Exercice 1:



Non, c'est impossible car la somme des degrés des sommés dans un graphe est paire.

$\sum_{x \varepsilon X} d(x) = 2m$

En effet une arête relie forcement 2 sommets.

X est l'ensemble des sommets dans un graphe et M le nombre d'arêtes.

Exercice 2:

Partie 1:

Rappel:

* Un graphe G est dit connexe si $\forall x, y \epsilon X$ tq $x <> y$, il existe une chaine reliant x à y.

* Si G n'est pas connexe, alors il est composé de n composantes connexes, qui sont des sous graphes disjoint.

Soit C_x la composante connexe à laquelle appartient le sommet x. C_x étant un graphe simple dans lequel la somme des degrés est paire.

Donc il existe forcement dans C_x un autre sommet $u <> x$ de degrés impaire quisque x et y sont des graphes connexes de C_x.

Donc il existe une chaine reliant x à y .

Partie 2:

Si G contient exactement deux sommets impaire x et y ces deux sommets appartiennent à la même composante connexe c (qui vérifie les propriétés d'un graph).

Exercice 3:

Si il y a un sommet de degrés (n-1), il est relié à tous les sommets.

Car il n'y a pas de sommet seul (degrès 0).

Si il existe un sommet x avec $d(x) = 0$ prenons le sous graphe $(G - x)$ contenant $(n-1)$ sommets.

Un sommet y de $(G - x)$ peut être relié à $(n-2)$ autres sommets de plus.

Exercice 4:

Rappel:

Un graphe complet est un graphe dans lequel toutes paire de sommet sont relié par <u>une</u> arête.

Cas général: on a toujours $m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ Si $m = \frac{n(n-1)}{2}$ alors c'est un graphe complet.

1)

Supposons que G est non connexe:

G est composé de deux sous-graphes disjoints C_1 et C_2 dans lequels nous avons.

$$\begin{cases} m_1 \leqslant \frac{n_1(n_1-1)}{2} \\ m_2 \leqslant \frac{n_2(n_2-1)}{2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_1 + n_2 = n \\ m_1 + m_2 = m \end{cases}$$

$$m = m_1 + m_2 \leqslant \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{(n-n_1)(n-n_1-1)}{2}$$

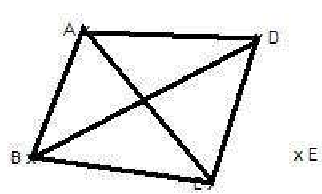
à démontrer $\forall n$ (à voir dans le futur corrigé) que:

$m \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ce qui entraine une contradiction

2)

Un graphe composé d'un sous-graphe complet de $(n-1)$ sommets et d'1 sommet isolé:

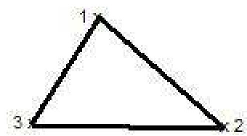
ex:



Exercice 5:

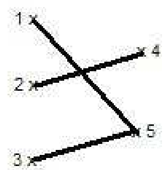
Rappel:

1) Un graph simple est k-régulier si $\begin{cases} \forall x \epsilon X \\ d(x) = K \end{cases}$



2-regulier

2) Un graphe $G = (Y, X, E)$ est biparti si chaque arête relie un sommet de X à un sommet de Y



$$\begin{cases} X = \{1, 2, 3\} \\ Y = \{4, 5\} \end{cases}$$

mk $= 2m$ dans un k-regulier soit $\frac{m}{k} = 2n$ éléments.

Le nb d'arête incidente à X (resp Y) est égale à m.

Soit $x \epsilon X$ (respectivement $y \epsilon Y$) $d(x) = K$ (respectivement $d(y) = K$)

alors $|x| = \frac{n}{k}$ (respectivement $|y| = \frac{n}{k}$)

Exercice 6: