

Théorie des Graphes - Tournées eulériennes et hamiltonniennes

Maria Malek

16 février 2009

Chaînes et cycles eulériens

Principal résultat

Algorithmes

Cycles Hamiltoniens

Quelques propriétés simples

Problème du voyageur de commerce

Notion d'algorithme ϵ -approché

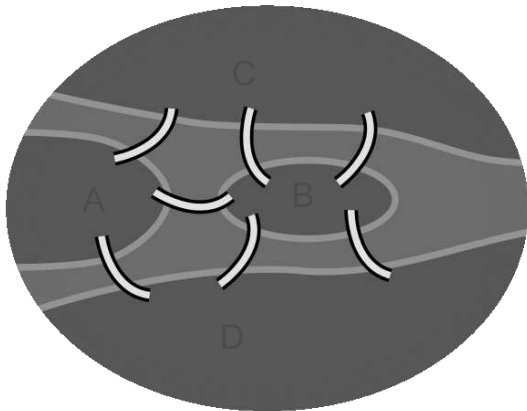
Approximation du PVC géographique

Justifications

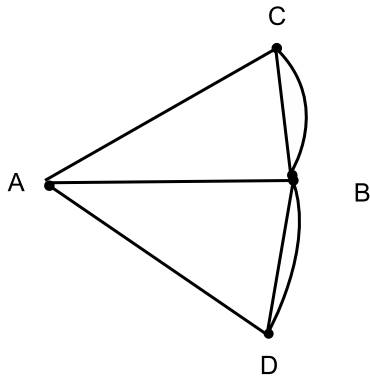
Définitions & Origines

- ▶ Une chaîne eulérienne d'un graphe G est une chaîne simple qui contient toutes les arêtes de G (qui passe une fois par chaque arête de G).
- ▶ Un cycle eulérien de G est une chaîne eulérienne fermée.
- ▶ Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien.
- ▶ Origine : Problème des ponts de Königsberg - (XVIII^e siècle) :
 - ▶ Sept ponts disposés sur une fleuve
 - ▶ Est ce possible de les traverser, chacun une fois avec retour au même point de départ ?

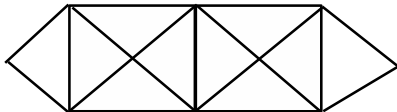
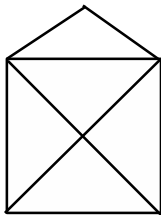
Les ponts de Königsberg - 1



Le Graphe des ponts de Königsberg - 2



Exemples de graphes eulériens



Théorème d'Euler - 1

- ▶ **THÉORÈME** Un graphe connexe G tel que $m \geq 1$ est eulérien ssi tous ses sommets sont de degrés pairs
- ▶ **PREUVE** (la condition nécessaire)
 - ▶ En suivant le cycle eulérien de graphe :
 - ▶ On passe par chaque sommet un nombre pair de fois car :
 - ▶ chaque fois qu'on arrive à un sommet on repart via une autre arête ;
 - ▶ Chaque fois, par des paires d'arêtes différentes, etc.
 - ▶ Jusqu'à l'arrivée au point de départ.

Théorème d'Euler - 2 :1

- ▶ **THÉORÈME** Un graphe connexe G tel que $m \geq 1$ est eulérien ssi tous ses sommets sont de degrés pairs
- ▶ **PREUVE** (la condition suffisante)
 - ▶ Pour $m=1$ la propriété est vraie (un sommet et une boucle).
 - ▶ supposons la propriété est vraie pour un graphe ayant un nombre d'arêtes strictement inférieur à m .
 - ▶ Soit un graphe de degré $> m$. Le degré minimale est de 2 (car le graphe est connexe).
 - ▶ Soit C un cycle de G . Soit $E(C)$ L'ensemble d'arêtes de C .
 - ▶ $G-E(C)$ les composantes connexes du graphe restant.
 - ▶ Soient H_1, \dots, H_k les composantes de $G-E(C)$.

Théorème d'Euler - 2 :2

- ▶ **THÉORÈME** Un graphe connexe G tel que $m \geq 1$ est eulérien ssi tous ses sommets sont de degrés pairs
- ▶ **PREUVE** (la condition suffisante - suite)
 - ▶ Chaque H_i étant un graphe eulérien (par hypothèse de récurrence)
 - ▶ Soit C_i le cycle eulérien de H_i , Il existe au moins un sommet commun x_i entre C et C_i (puisque le graphe G est connexe)
 - ▶ On peut définir un cycle eulérien dans le graphe en intercalant C_i dans C au sommet x_i pour chaque i dans $1..k$.

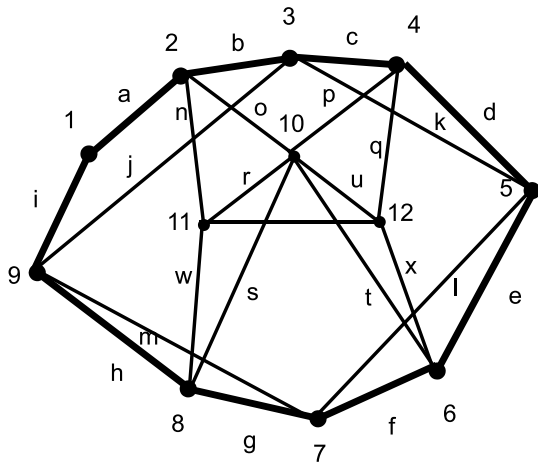
Théorème d'Euler - 3

- ▶ **COROLLAIRE** Un graphe connexe a une chaîne eulérienne ssi le nombre de ses sommets de degrés impairs est ≤ 2 .
- ▶ **PREUVE**
 - ▶ Tout graphe a un nombre pair de sommets impairs.
 - ▶ Si G n'a pas de sommets impairs, il est eulérien et donc a une chaîne eulérienne (fermée).
 - ▶ Si G a deux sommets impairs x et y , nous construisons G' à partir de G en ajoutant une arête e entre x et y .
 - ▶ Le graphe G' obtenu est eulérien.
 - ▶ Le cycle eulérien restreint à G est une chaîne reliant x à y (et ne passant pas par e).

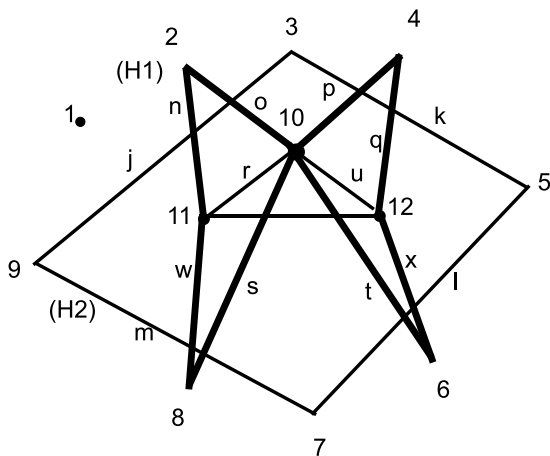
Théorème d'Euler : Algorithme récursif

- ▶ **fonction** Euler(G) : cycle
 construire-Cycle(C, G)
 si $E(G) \setminus E(C) \neq \emptyset$ **alors**
 determiner-Composantes (H_1, H_2, \dots, H_k)
 $i \leftarrow 1$
 tantque $i \leq k$ **faire**
 $C_i \leftarrow Euler(H_i)$
 fin tantque
 intercaler (C_1, C_2, \dots, C_k)
 fin si
 RETOURNER C
- ▶ Algorithme linéaire : $O(m)$.

Algorithme d'Euler : Exemple - 1



Algorithme d'Euler : Exemple - 2



Algorithme d'Euler : Exemple - 3

- ▶ $C = (a, b, c, d, e, f, g, h, i)$
- ▶ Deux composantes connexes H_1, H_2
 - ▶ $C_1 = (o, u, v, r, p, q, x, t, s, w, n)$ obtenu après appel récursif en intercalant (u, v, r) dans (o, p, q, x, t, s, w, n)
 - ▶ $C_2 = (k, l, m, j)$
- ▶ Le cycle eulérien :
 $(a, o, u, v, r, p, q, x, t, s, w, n, b, k, l, m, j, c, d, e, f, g, h, i)$

Définitions

- ▶ Soit G un graphe simple non orienté, un cycle hamiltonien est un cycle élémentaire qui passe par tous les sommets de G .
- ▶ Un graphe G est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.
- ▶ Une chaîne hamiltonienne est une chaîne élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe (sans retour obligatoire au point de départ)

Propriétés & Théorèmes

- ▶ Un graphe complet k_n avec $n \geq 3$ est hamiltonien (il contient $\frac{(n-1)!}{2}$ cycles différents).
- ▶ Un graphe biparti $G=(X,Y,E)$ ne peut être hamiltonien que si $|X|=|Y|$
- ▶ **PROPOSITION 1** Si le graphe $G=(X,E)$ est hamiltonien alors pour $S \subset X$ tel que $S \neq \emptyset$ et $S \neq X$, et si $p(G-S)$ le nombre de composantes connexes du sous graphe $G-S$ on a :

$$p(G - S) \leq |S|$$

- ▶ **THEOREME 1** Un graphe simple $G=(X,E)$ est hamiltonien si $d(x) + d(y) \geq n$ quelques soient deux sommets non voisins x et y .

Problème du voyageur de commerce : PVC

- ▶ Faire la tournée d'un certain nombre de villes en passant une fois par chacune et en retournant à la ville de départ.
- ▶ Souhaite rendre minimale la distance parcourue.
- ▶ Modélisation : Un graphe $G=(X,E)$ complet K_n valué par $v : E \rightarrow R^+$
- ▶ Il s'agit d trouver un cycle hamiltonien C dans G tel que $v(C)$,soit minimal.

PVC : Notion d'algorithme ϵ -approché

- ▶ PVC : problème difficile NP-complet non réalisable en temps polynomial ($\frac{(n-1)!}{2}$ cas à tester !!)
- ▶ Stratégie gloutonne échoue ici.
- ▶ essayer une *solution approchée*
 - ▶ Soit I une instance du PVC, $R(I)$ l'ensemble de solutions réalisables :

$$v^*(I) = \min_{C \in R(I)} v(C)$$

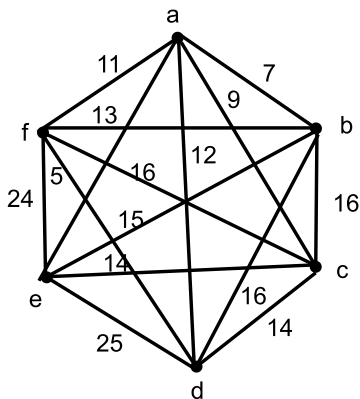
- ▶ $v^*(I)$ correspond à la valeur optimale de I . Si C^* est une solution optimale de I on a $v^*(I) = v(C^*)$
- ▶ Un algorithme ϵ approché est un algorithme qui propose une solution C tel que : $v(C) - v^*(I) \leq \epsilon v(C)$ ou bien :

$$\frac{v(C)}{v^*(I)} \leq \frac{1}{1 - \epsilon}$$

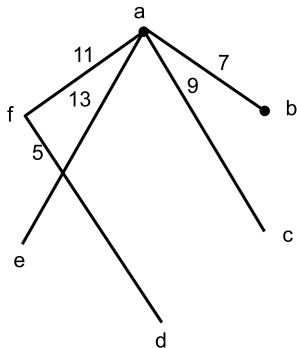
PVC Géographie : Algorithme approché

- ▶ Le PVC géographique est un PVC pour lequel l'inégalité triangulaire est vérifiée.
- ▶ Soit $G(X,E)$, $\forall x, y, z \in X$, $v(xz) \leq v(xy) + v(yz)$
- ▶ Voilà les étapes de l'algorithme :
 1. Construire un arbre couvrant T de G à l'aide de l'algorithme de Kruskal (algorithme linéaire : $O(m)$).
 2. Doubler chaque arête de T pour obtenir un graphe eulérien U . Trouver le cycle eulérien D de U (algorithme linéaire : $O(m)$).
 3. Raccourcir la suite de D en supprimant tout sommet déjà rencontré auparavant (parcours linéaire).

PVC Géographie : Algorithme approché - Exemple

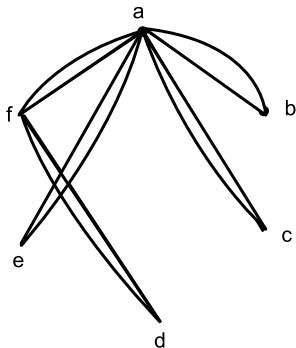


PVC Géographie : Algorithme approché - 1



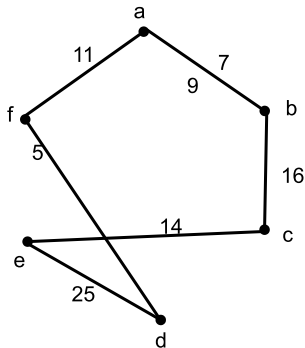
T : L'arbre couvrant

PVC Géographie : Algorithme approché - 2



$D=(a,f,d,f,a,e,a,c,a,b,a)$

PVC Géographie : Algorithme approché - 3



$C=(a,f,d,e,c,b,a)$

PVC Géographie : Algorithme approché - Justification

- ▶ Soit C le cycle obtenu à l'étape 3. Il est hamiltonien car il passe par tous les sommets de G .
- ▶ T l'arbre couvrant minimum vérifie la relation $v(T) \leq v^*(I)$
- ▶ La valeur totale du cycle eulérien D : $v(D) = 2v(T)$
- ▶ A l'étape 3 un raccourcissement d'une chaîne (x_1, x_2, \dots, x_k) par x_1x_k vérifie (grâce à l'inégalité triangulaire) : $v(x_1x_k) \leq \sum_{i=1}^{k-1} v(x_i x_{i+1})$
- ▶ On a ainsi : $v(C) \leq v(D) = 2v(T)$, donc $v(C) \leq 2v^*(I)$ et donc :

$$\frac{v(C)}{v^*(I)} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

- ▶ L'algorithme est alors $\frac{1}{2}$ -approché pour le PVC géographique.