TD 6 Programmation linéaire en nombres entiers

Exercice 1

Un ébéniste fabrique des armoires et des tables. Une armoire nécessite 1h de travail et 9 m2 de bois ; Une table nécessite 1h de travail et 5m2 de bois ; On dispose de 6h de travail et de 45 m2 de bois ; Chaque armoire génère un profit de 8 €, et chaque table 5 €.

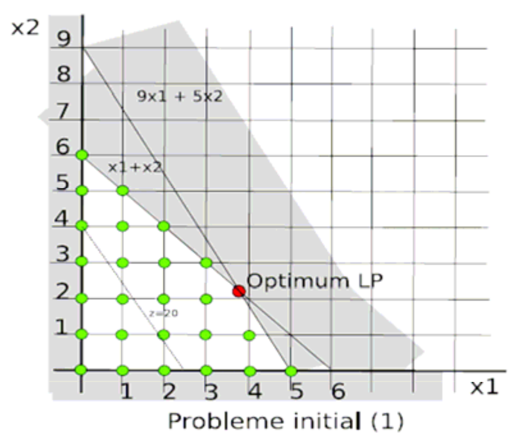
1. Formuler le problème P qui maximise le profit de l'ébéniste.
2. Représenter le domaine des solutions ce problème
3. Donner la solution du problème à variables continues
4. Résoudre le problème obtenu par la méthode de séparation/évaluation, quel choix de la variable de séparation doit on faire et pourquoi?
   - Critère de la variable la plus distante
   - Critère du meilleur c_j
5. Faites le parcours de l'arbre en profondeur

<u>Corrigé</u>

1. Formuler le problème P qui maximise le profit de l'ébéniste.

max $z = 8x_1 + 5x_2$
$x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{N}$

2. Représenter le domaine des solutions ce problème initial P1



3. Donner la solution du problème à variables continues

On commence par résoudre la formulation de relaxation du problème en entiers, c-à-d le problème en variables continues (LP). Ici, on obtient :
$z = 165/4 = 41.25$
$x1 = 15/4 = 3.75$
$x2 = 9/4 = 2.25$

Si la solution est en entiers, on s'arrête, on a trouvé l'optimal. Ici ce n'est pas le cas, mais la valeur z obtenue est une borne supérieure pour l'optimum en entiers.

4. Résoudre le problème obtenu par la méthode de séparation/évaluation, quel choix de la variable de séparation doit on faire et pourquoi?

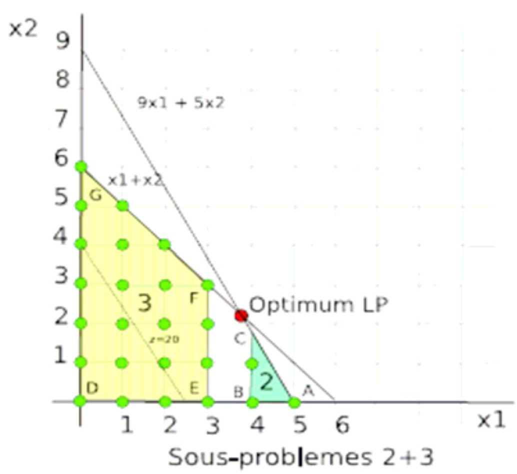
- Critère de la variable la plus distante (les deux variables ont la même distance pour atteindre une valeur entière 0.25
- Critère du meilleur c_j (comme c'est une maximisation, c1 = 8 et c2 = 5, donc on prend x_1)

5. Faites le parcours de l'arbre en profondeur

On a donc maintenant deux sous-problèmes :

P2. Problème initial + contrainte $x1 \geq 4$

P3. Problème initial + contrainte $x1 \leq 3$.



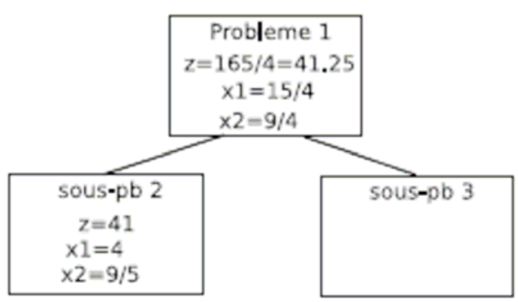
On en choisi un arbitrairement parmi ceux non résolus, par exemple ici le problème P2.

La solution de relaxation (LP) pour la région P2 est

$z = 41$

$x_1 = 4$

$x_2 = 9/5$



Comme $x2$ est toujours fractionnaire, on décide de séparer sur cette variable, on sépare donc la région 2 entre deux zones :

Nous voici avec deux nouveaux sous-problèmes

P4. Problème 2 + contrainte $x2 \geq 2$

P5. Problème 2 + contrainte $x2 \leq 1$.

On constate que le problème P4 n'est pas réalisable. En résolvant le problème de relaxation LP lié au sous-problème P5, on trouve l'optimum avec
$z = 365/9 = 40.555\ldots$
$x1 = 40/9 = 4.444\ldots$
$x2 = 1$

il faut donc de nouveau séparer sur $x1$, avec les contraintes

P6. Problème 5 + contrainte $x1 \geq 5$

P7. Problème 5 + contrainte $x1 \leq 4$.

Nous choisissons arbitrairement P7, la solution de relaxation LP est maintenant :
$z = 37$
$x1 = 4$
$x2 = 1$
Cette solution est réalisable, il est inutile de continuer à séparer sur cette branche.

On continue à évaluer en profondeur d'abord, on résout maintenant le sous-problème P6, et on trouve la solution
$z = 40$
$x1 = 5$
$x2 = 0$
Il s'agit également d'une solution réalisable candidate. La valeur de la borne inférieure de notre problème est donc maintenant 40.

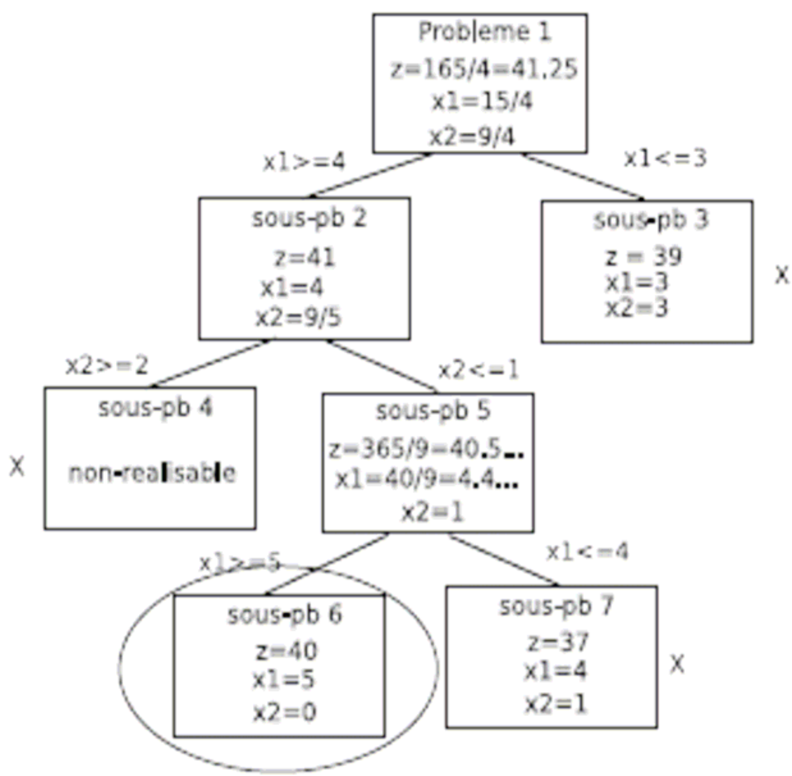
La solution du P7 n'est donc pas optimale, et il est inutile de séparer davantage sur P6.

Il reste à évaluer la solution pour P3. On trouve la solution correspondant au point F :
$x1 = 3$
$x2 = 3$
$z = 39$

Ce résultat est inférieur à 40, notre borne inférieure, donc cette branche de l'arbre de peut pas produire un meilleur résultat que celui déjà connu correspondant au problème P6.

Il ne reste plus de nœud de l'arbre à explorer, on a donc trouvé notre optimum en nombre entier :

fabriquer 5 armoires et 0 table pour un profit de 40 €.



Exercice 2

max z = $4x_1 + 3x_2$
$3x_1 + 4x_2 \leq 12$
$-4x_1 - 2\,x_2 \geq -9$
$10\,x_1 \leq 22$
$x_1, x_2 \in$ N

La solution du PL relaxé est : x*(1.2, 2.1) pour z* = 11.1

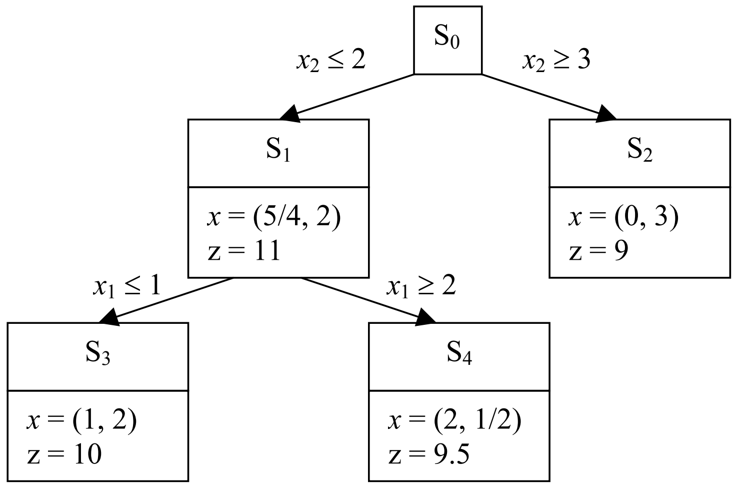
1. Donner le PL standard
2. Résoudre le problème (P) par une méthode de Branch and Bound.
3. Représenter graphiquement le domaine des solutions réalisables à chaque étape de la méthode de Branch and Bound.

<u>Corrigé</u>

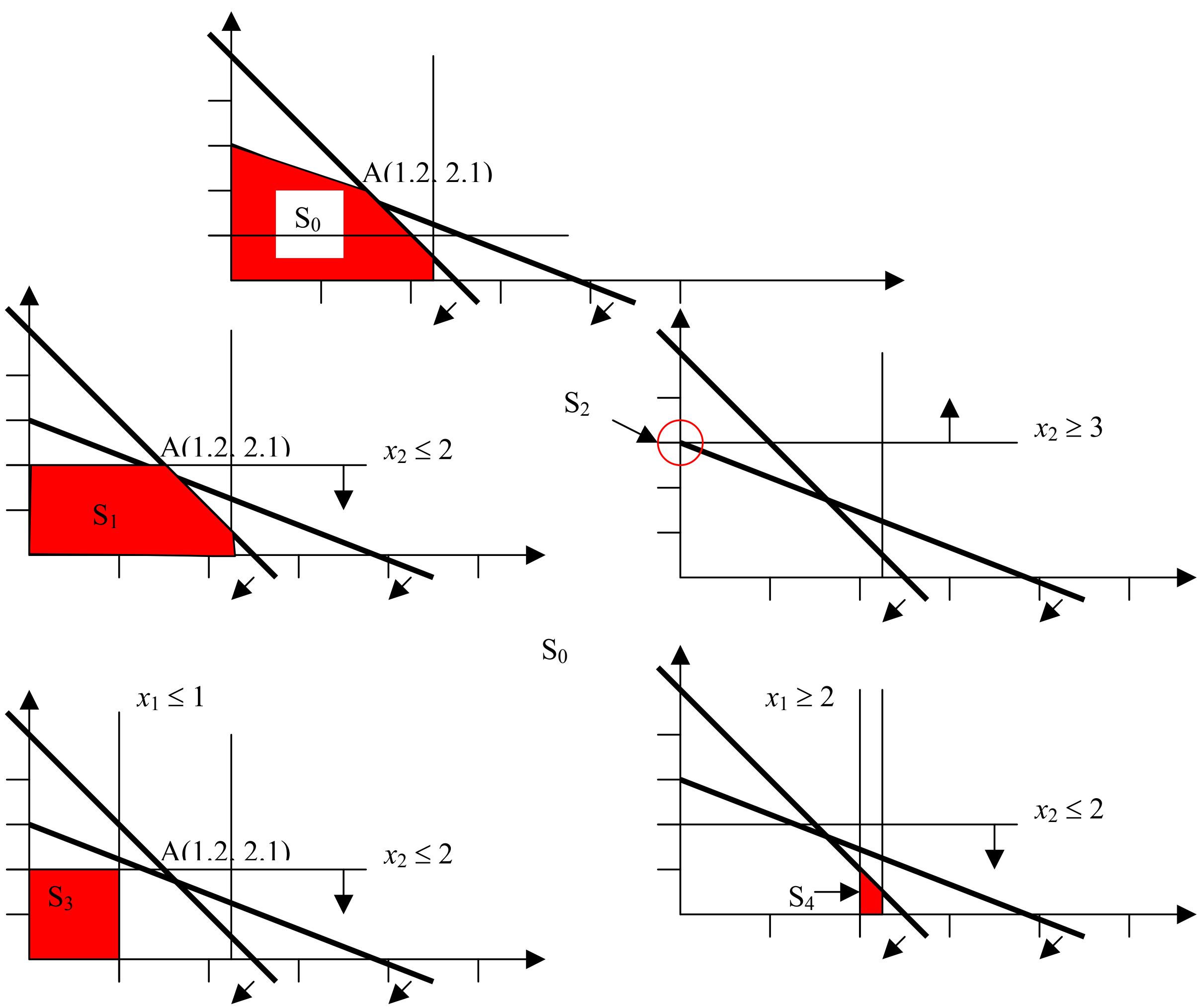
1. Donner le PL standard

max z = $4x_1 + 3x_2$
$3x_1 + 4x_2 \leq 12$
$-4x_1 - 2\,x_2 \geq -9 \;\rightarrow\; 4x_1 + 2\,x_2 \leq 9$
$10\,x_1 \leq 22$
$x_1, x_2 \in$ N

2. Résoudre le problème (P) par une méthode de Branch and Bound.



3. Représenter graphiquement le domaine des solutions réalisables à chaque étape de la méthode de Branch and Bound.



Exercice 3 : PROBLÈME DE RECOUVREMENT

DONNÉES : Les demandes journalières en chauffeurs dans une entreprise de transport

Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
13	18	21	16	12	25	9

Les chauffeurs travaillent 5 jours d'affilée (et peuvent donc avoir leurs 2 jours adjacents de congé n'importe quand dans la semaine)

OBJECTIFS : Déterminer les effectifs formant les 7 équipes possibles de chauffeurs de manière à:

- couvrir tous les besoins
- engager un nombre minimum de chauffeurs

Variables de décision : On associe une variable de décision à chacune des 7 équipes possibles

x1 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du lundi (repos le samedi et le dimanche),

- x2 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du mardi, ...
- x7 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du dimanche.

Corrigé

Fonction objectif : On veut minimiser le nombre total de chauffeurs engagés

$z = x1 + \ldots + x7$

Contraintes : Le nombre de chauffeurs présents chaque jour doit être suffisant

- $x1 + x4 + x5 + x6 + x7 \geq 13$ (lundi)
- $x1 + x2 + x5 + x6 + x7 \geq 18$ (mardi)
- …
- $x3 + x4 + x5 + x6 + x7 \geq 9$ (dimanche)

Contraintes de bornes : Le nombre de chauffeurs dans chaque équipe doit non seulement être non négatif mais également entier

- $xi \geq 0$ et entier; $i = 1; \ldots; 7$

--

FORMULATION

Min $z = x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7$

- **Sujet à:**
  - $x1 + x4 + x5 + x6 + x7 \geq 13$
  - $x1 + x2 + x5 + x6 + x7 \geq 18$
  - $x1 + x2 + x3 + x6 + x7 \geq 21$
  - $x1 + x2 + x3 + x4 + x7 \geq 16$
  - $x1 + x2 + x3 + x4 + x5 \geq 12$
  - $x2 + x3 + x4 + x5 + x6 \geq 25$
  - $x3 + x4 + x5 + x6 + x7 \geq 9$
  - **$x1 ; x2 ; x3 ; x4 ; x5 ; x6 ; x7 \geq 0$ entiers**

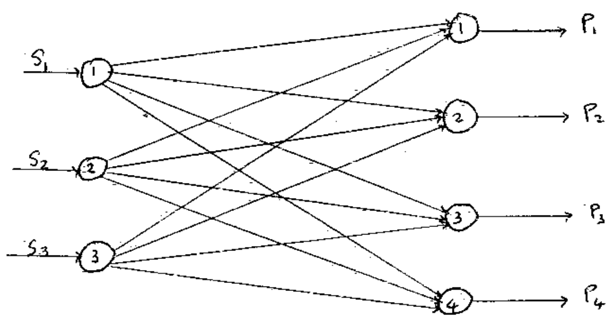
Exercice 4 : PROBLÈME DE TRANSPORT

- **EXEMPLE**
  - **Une municipalité possède 3 serres pour fournir 4 parcs**
  - **Capacité de production des serres C1, C2 et C3**
  - **Demande hebdomadaire D1, D2, D3 et D4**
  - **Coût unitaire de transport Cij**

- **3 serres:**
  - **S1 = 3**
  - **S2 = 7**
  - **S3 = 5**

- **4 parcs:**
  - **P1 = 4**
  - **P2 = 3**
  - **P3 = 4**
  - **P4 = 4**

- **Coûts d'expédition:**



$$\mathbf{c}_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>**Corrigé**</u>

FORMULATION DU PROBLÈME

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

sujet à

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = D_j \quad j = 1, \ldots, 4$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_j \leq C_i \quad i = 1, \ldots, 3$$

et

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 3 \quad j = 1, \ldots, 4$$