TD 5 Programmation linéaire et optimisation
Dualité

Exercice 1 : Donner le dual du primal suivant :

Primal

a) Max $Z = 2x1 + 4x2 + 3x3$
$3x1 + 4x2 + 2x3 \leq 60$
$2x1 + x2 + 2x3 \leq 40$
$x1 + 3x2 + 2x3 \leq 80$
$x1, x2, x3 \geq 0$

b) Min $Z = 20x1 + 24x2$
$x1 + x2 \geq 30$
$x1 + 2x2 \geq 40$
$x1, x2 \geq 0$

c) Max $Z = 10x1 + 6x2$
$x1 + 4x2 \leq 40$
$3x1 + 2x2 = 60$
$2x1 + x2 \geq 25$
$x1, x2 \geq 0$

Dual

a) Min $w = 60y1 + 40y2 + 80y3$
$3y1 + 2y2 + y3 \geq 2$
$4y1 + y2 + 3y3 \geq 4$
$2y1 + 2y2 + 2y3 \geq 3$
$y1\geq 0, y2 \geq, y3 \geq 0$

b) Max $w = 30y1 + 40y2$
$y1 + y2 \leq 20$
$y1 + 2y2 \leq 24$
$y1\geq 0, y3 \geq 0$

c) Min $w = 40y1 + 60y2 - 25y3$
$y1 + 3y2 - 2y3 \geq 10$
$4y1 + 2y2 - y3 \geq 6$
$y1\geq 0, y3 \geq 0$, y2 quelconque

<u>Corrigé:</u>

Exercice 2

Dans le cas d'un problème de programmation linéaire (minimisation) possédant une solution optimale finie, l'algorithme primal du simplexe permet à chaque itération de passer d'une solution de base réalisable pour le primal à une autre jusqu'à ce que les conditions d'optimalité soient satisfaites: un vecteur de coût relatif dont les composantes sont non négatives.
i) Qu'en est-il de l'algorithme dual du simplexe?
ii) Qu'en est-il de l'algorithme primal-dual?

<u>Corrigé:</u>
i) Qu'en est-il de l'algorithme dual du simplexe?
L'algorithme dual du simplexe permet de passer d'une solution de base du primal à une autre qui satisfait aux conditions d'optimalité: un vecteur de coût relatif dont les composantes sont non négatives.
L'algorithme termine lorsque la solution de base est réalisable pour le primal.
ii) Qu'en est-il de l'algorithme primal-dual?
L'algorithme primal-dual permet de passer à chaque itération d'une solution réalisable pour le problème dual à une autre, et d'une solution irréalisable pour le primal qui satisfait aux conditions d'optimalité (le théorème des écarts complémentaires) à une autre. L'algorithme termine lorsque la solution primale est réalisable.

Exercice 3

Max Z = 40x1 + 50x2

5x1 + 4x2 ≤ 80

x1 + 2x2 ≤ 24

3x1 + 2x2 ≤ 36

x1, x2 ≥ 0

1- Donner le dual PL* de ce primal PL

2- Résoudre le primal PL par le simplexe ou graphiquement

3- Déduire la solution du dual PL*

<u>Corrigé:</u>

1. Donner le dual PL* de ce primal PL

Min w=80y1 + 24y2 + 36y3

5y1+y2+3y3 ≥ 40

4y1+2y2+2y3 ≥ 50

y1,y2,y3≥0

2. Résoudre le primal PL par le simplexe ou graphiquement

$$\begin{cases} z - 40x_1 - 50x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + s_1 = 80 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_3 = 36 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
5	4	1	0	0	80	80/4	s_1
1	**2**	0	1	0	24	**24/2**	s_2
3	2	0	0	1	36	36/2	s_3
-40	**-50**	0	0	0	0		

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
3	0	1	-2	0	32	32/3	s_1
1/2	1	0	1/2	0	12	12*2	x_2
2	0	0	-1	1	12	**12/2**	s_3
-15	0	0	25	0	600		

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	bi	ratio	base
0	0	1	-1/2	-3/2	**14**		s_1
0	1	0	3/4	-1/4	**9**		x_2
1	0	0	-1/2	1/2	**6**		x_1
0	**0**	**0**	**17.5**=35/2	**7.5**=15/2	**690**		

La solution est :
$x_1 = 6$, $x_2 = 9$, $s_1 = 14$,
$s_2 = 0$, $s_3 = 0$
$z = 690$

3. Déduire la solution du dual PL^*
A l'optimum, le primal et le dual sont liés par les règles suivantes:
- les fonctions objectifs z et w ont la même valeur optimale **$z=cx^* = y^*b=w$**
- la valeur marginale d'une variable dans un programme est égale à l'opposé de la valeur optimale de la variable associée dans l'autre programme et réciproquement

- les variables du primal (**x_1, x_2**), étant toutes différentes de 0, alors les contraintes associées du dual sont saturées, d'où pour le dual à résoudre:

$5y1+y2+3y3 = 40$
$4y1+2y2+2y3 = 50$

- la première variable d'écart **s_1** est non nulle donc la première valeur $y_1 = 0$, d'où le dual à résoudre est :
$y2+3y3 = 40$
$2y2+2y3 = 50$

Primal	**z = 690**	**x1**	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**
	valeurs optimales	6	9	14	0	0
	valeurs marginales	0	0	0	-17.5	-7.5
Dual	**w = 690**	**t1**	**t2**	**y1**	**y2**	**y3**
	valeurs optimales	0	0	0	17.5	7.5
	valeurs marginales	-6	-9	-14	0	0

Au fait, il n'existe que quatre situations possibles pour une paire de problèmes liés par la dualité :
1. Les deux problèmes possèdent des solutions optimales finies (liées par les relations ci-dessus)
2. Le problème primal est non borné et le problème dual est impossible
3. Le problème primal est impossible et le problème dual est non borné
4. Les deux problèmes sont impossibles

Exercice 4

Un fabricant produit 2 variétés de biscuit, l'une à la noix de coco et l'autre au chocolat, selon le schéma suivant :

Biscuit	Ingrédient			Prix de vente
	Farine	Chocolat	Noix de coco	
A	1	0	3	6
B	1	5	0	5
Disponible	8	22	12	

a) Formuler le problème comme un PL et trouver un plan de fabrication qui maximise le profit ;
b) Pour quelle variation du prix de vente du biscuit au chocolat, ce plan de fabrication reste optimal ?
c) On annonce une pénurie de chocolat ; déterminer la quantité minimale de chocolat nécessaire en stock, pour que ce plan de fabrication ne soit pas compromis ;
d) On étudie la production d'un nouveau biscuit à la noix de coco et au chocolat à raison de 1/3 de noix de coco et 2/3 de chocolat. Ce nouveau produit sera vendu à 8F. Quel est le schéma de production optimal ?
e) Déterminer le dual PL^* de ce primal PL
f) En déduire la solution du dual PL^*

<u>Corrigé:</u>

a)

$\max z = 6x_1 + 5x_2$

$x_1 + x_2 \leq 8$

$5x_2 \leq 22$

$3x_1 \leq 12$

$x_1 , x_2 \geq 0$

$\max z = 6x_1 + 5x_2$

$x_1 + x_2 + s_1 = 8$ (Farine)

$5x_2 + s_2 = 22$ (Chocolat)

$3x_1 + s_3 = 12$ (Noix de coco)

$x_1 , x_2 , s_1 \; s_2 \; s_3 \geq 0$

Forme tableau							
Coefficients						bi	Var base
f	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	1	1	1	0	0	8	s_1
0	0	5	0	1	0	22	s_2
0	**3**	0	0	0	1	12	s_3
1	**-6**	-5	1	0	0	0	f
0	0	**1**	1	0	-1/3	4	s_1
0	0	5	0	1	0	22	s_2
0	1	0	0	0	1/3	4	x_1
1	0	**-5**	1	0	0	24	f
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**-1/3**	**4**	$\boldsymbol{x_2}$
0	0	0	5	-1	-5/3	-2	s_2
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**1/3**	**4**	$\boldsymbol{x_1}$
1	0	0	5	0	1/3	44	f

La solution est :

$f = 44$

$x_1 = 4$

$x_2 = 4$

$s_2 = 2$

$s_1 = 0$

$s_3 = 0$

b)

$\max z = 6x_1 + C_2 x_2$

$\boldsymbol{x_2 = 4 - s_1 + (1/3)\, s_3}$

$\boldsymbol{x_1 = 4 - (1/3)\, s_3}$

$z = 6(4 - (1/3)\, s_3) + C_2 (4 - s_1 + (1/3)\, s_3)$

$z - (-s_1 C_2) - s_3((1/3)\, C_2 - 2) = 4(6 + C_2)$

$\Rightarrow -C_2 \leq 0 \Rightarrow C_2 \geq 0$

et $(1/3)\, C_2 - 2 \leq 0 \Rightarrow (1/3)\, C_2 \leq 2 \Rightarrow C_2 \leq 6$

On en déduit que $C_2 \in [0, 6]$

c)
d'après les coût marginaux, il nous reste en stock 2 quantité de chocolat, donc la quantité minimale pour que plan de fabrication optimal ne soit pas compromis, il faut avoir en réserve 22-2 =20 quantité de chocolat

d)
$\max z = 6x_1 + 5x_2 + 8x_3$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$5x_2 + (1/3)\, x_3 \leq 22$
$3x_1 + (2/3)\, x_3 \leq 12$
$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

e) Déterminer le dual PL* de ce primal PL

$\max z = 6x_1 + 5x_2$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$5x_2 \leq 22$
$3x_1 \leq 12$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

min w = 8y1 + 22y2 + 12y3
y1 + 5y2 + 3y3 ≥ 6
y1 ≥ 22
y1 ≥ 0, y2 ≥ 0, y3 ≥ 0

f) En déduire la solution du dual PL*

z = cx* = y*b = w

Primal	**z = 44**	**x1**	**x2**	**s1**	**s2**	**s3**
	valeurs optimales	4	4	0	2	0
	valeurs marginales	0	0	-5	0	-1/3
Dual	**w = 44**	**t1**	**t2**	**y1**	**y2**	**y3**
	valeurs optimales	0	0	5	0	1/3
	valeurs marginales	-4	-4	0	-2	0