TD 4 Programmation linéaire et optimisation
Méthode des 2 phases, Méthode de pénalités (ou Méthode du Grand M)

Exercice 1:

$$\begin{cases} \text{Trouver le maximum de } z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 7/3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ce PL à l'aide de la méthode de pénalités
2. Résoudre ce PL à l'aide de la méthode en deux phases de Dantzig
3. Utiliser les logiciels connus pour résoudre ce PL

Corrigé :

a) On introduit les variables d'écart

$$\begin{cases} \text{Trouver le maximum de } z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + t_1 \quad = 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad - t_2 = 7/3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ce PL à l'aide de la méthode de pénalités

On ne dispose pas dans ce cas d'une solution réalisable de départ évidente. Si on pose : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $t_1 = 8/3$ et $t_2 = -7/3$, qui n'est pas une solution réalisable. On ajoute alors une variable artificielle a2, et le PL devient :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } z' = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 0t_1 + 0t_2 - Ma_2 \text{ ou } \mathbf{z' - 3x_1 - 4x_2 - x_3 + 0t_1 + 0t_2 + Ma_2 = 0} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + t_1 \quad = 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad - t_2 + a_2 = 7/3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 1

HB / B	x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$	t_1	t_2	a_2	bi	ratio
t_1	1	2	2	1	0	0	8/3	8/3
$\mathbf{a_2}$	1	2	**3**	0	-1	1	7/3	7/3
c_j	-3	-4	-1	0	0	+M		

On annule cette valeur

Tableau 2

HB / B	x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$	t_1	t_2	a_2	bi	ratio
t_1	1	2	2	1	0	0	8/3	8/3
$\mathbf{a_2}$	1	2	**3**	0	-1	1	7/3	7/3
Δ_j	-3-M	-4-2M	-1-3M	0	+M	0	-7/3*M	

La variable $\mathbf{x_3}$ entre dans la base i et la variable $\mathbf{a_2}$ sort de la base

Tableau3

HB / B	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	a_2	bi	ratio
t_1	1/3	2/3	0	1	2/3	-	10/9	
x_3	1/3	2/3	1	0	-1/3	-	7/9	
Δ_j	-8/3	-10/3	0	0	-1/3	-	+7/9	

Nous disposons maintenant d'une solution réalisable et nous pouvons continuer de façon classique la méthode des tableaux.

Tableau 4

HB / B	x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3	t_1	t_2	bi	ratio
t_1	1/3	2/3	0	1	2/3	10/9	10/9 *3/2
$\mathbf{x_3}$	1/3	**2/3**	1	0	-1/3	7/9	7/9 * 3/2
Δ_j	-8/3	-10/3	0	0	-1/3	+7/9	

La variable $\mathbf{x_2}$ entre dans la base et la variable $\mathbf{x_3}$ sort de la base. On obtient :

Tableau 5

HB / B	x_1	x_2	x_3	t_1	$\mathbf{t_2}$	bi	ratio
$\mathbf{t_1}$	0	0	-1	1	**1**	1/3	
x_2	1/2	1	3/2	0	-1/2	7/6	
Δ_j	-1	0	+5	0	-2	+14/3	

La variable $\mathbf{t_2}$ entre dans la base et la variable $\mathbf{t_1}$ sort de la base. On obtient :

Tableau 6

HB / B	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	t_1	t_2	bi	ratio
t_2	0	0	-1	1	1	1/3	
$\mathbf{x_2}$	1/2	1	1	1/2	0	4/3	
Δ_j	-1	0	+3	+3	0	+16/3	

Tableau 7

HB / B	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	bi	ratio
t_2	0	0	-1	1	1	1/3	
x_1	1	2	2	1	0	8/3	
Δ_j	0	2	5	4	0	24/3	

La solution optimale du programme linéaire initial est donc ::
$x_1 = 8/3$, $t_2 = 1/3$
$x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $t_1 = 0$
$z = 24/3$

2. Résoudre ce PL à l'aide de la méthode en deux phases de Dantzig

$$\begin{cases} \text{Maximiser } z' = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 0t_1 + 0t_2 - Ma_2 \text{ ou } \mathbf{z'-3x_1 - 4x_2 - x_3 + 0t_1 + 0t_2 + a_2 = 0} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + t_1 = 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - t_2 + a_2 = 7/3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Phase 1: On remplace la maximisation de Z par la minimisation de $z' = a_2$
Cette fonction sera nulle lorsque les variable artificielle seront sortie de la base

$$\begin{cases} \text{Min } z' = a_2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + t_1 = 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - t_2 + a_2 = 7/3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Pour calculer les profits marginaux, il faut exprimer la fonction économique en fonction des variables hors base.
Les variables de base sont t_1 et a_2

HB / B	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	a_2	bi	ratio
t_1	1	2	2	1	0	0	8/3	
a_2	1	2	3	0	-1	1	7/3	
c_j	0	0	0	0	0	-1		

On annule cette valeur

HB / B	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	a_2	bi	ratio
t_1	1	2	2	1	0	0	8/3	8/3*2
a_2	1	2	3	0	-1	1	7/3	7/3*3
z'	1	2	3	0	-1	0	7/3	

HB / B	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	a_2	bi	ratio
t_1	1/3	2/3	0	1	2/3	-2/3	10/9	
x_3	1/3	2/3	1	0	-1/3	1/3	7/9	
z'	0	0	0	0	0	-1	0	

Nous sommes à l'optimum de la première phase et nous disposons d'une solution de base réalisable $t_1 = 10/9$, $x_3 = 7/9$
$x_1 = x_2 = t_2 = a_2 = 0$

Remarque :
Si à l'optimum la somme des variables artificielles n'était pas nulle, cela signifierait que le programme linéaire n'a pas de solution (contraintes contradictoires).

Phase 2
On détermine les profits marginaux correspondant à la fonction objectif du programme linéaire. Pour cela, il faut éliminer de la fonction objectif les variables de base donc la variable x x_3
On tire cette variable de la deuxième contrainte est on la remplace dans $z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$

On obtient le nouveau PL

HB / B	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	a_2	bi	ratio
t_1	1/3	2/3	0	1	2/3	-	10/9	
x_3	1/3	2/3	1	0	-1/3	-	7/9	
Δ_j	-8/3	-10/3	0	0	-1/3	-	+7/9	

On a obtenu le tableau **Tableau 4**de la méthode du grand M
On continue de la même façon que précédemment

Exercice 2
Soit à résoudre le programme linéaire suivant

$$\begin{cases} \text{Max } z = x_1 + 7x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Faire une résolution graphique
2. Résoudre ce PL à l'aide de la méthode en deux phases de Dantzig
3. Utiliser les logiciels connus pour résoudre ce PL
4. Conclusion

<u>**Corrigé :**</u>

Phase I

Forme standard
Min $z' = e_1 + e_2$
$1\ x_1 + 1\ x_2 - 1\ t_1 + 0\ t_2 + 0\ t_3 + 1\ e_1 + 0\ e_2 = 6$
$1\ x_1 + 0\ x_2 + 0\ t_1 - 1\ t_2 + 0\ t_3 + 0\ e_1 + 1\ e_2 = 4$
$0\ x_1 + 1\ x_2 + 0\ t_1 + 0\ t_2 + 1\ t_3 + 0\ e_1 + 0\ e_2 = 3$
$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $t_1 \geq 0$; $t_2 \geq 0$; $t_3 \geq 0$; $e_1 \geq 0$; $e_2 \geq 0$

HB / B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_1	e_2	b_i
e_1	1	1	-1	0	0	1	0	6
e_2	1	0	0	-1	0	0	1	4
t_3	0	1	0	0	1	0	0	3
z'	0	0	0	0	0	1	1	0

Annuler les 2 valeurs

La ligne Delta donne les coefficients de la fonction économique, mais pas les valeurs marginales des variables HB

HB / B	**x_1**	x_2	t_1	t_2	t_3	e_1	e_2	b_i	ratio
e_1	1	1	-1	0	0	1	0	6	6
e_2	**1**	0	0	-1	0	0	1	4	**4**
t_3	0	1	0	0	1	0	0	3	infini
z'	-2	-1	1	1	0	0	0	-10	

HB / B	**x_1**	**x_2**	t_1	t_2	t_3	e_1	e_2	b_i	ratio
e_1	0	**1**	-1	1	0	1	-	2	2
x_1	1	0	0	-1	0	0	-	4	infini
t_3	0	1	0	0	1	0	-	3	3
z'	0	-1	1	-1	0	0	-	-2	

HB / B	**x_1**	**x_2**	t_1	t_2	t_3	e_1	e_2	b_i	ratio
x_2	0	1	-1	1	0	-	-	2	
x_1	1	0	0	-1	0	-	-	4	
t_3	0	0	1	-1	1	-	-	1	
z'	0	0	0	0	0	-	-	0	

L'optimum est atteint.
Une solution de base admissible est donc $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $t_1 = 0$; $t_2 = 0$; $t_3 = 1$, et $z = 0$

Phase II

A partir de cette solution de base admissible, on poursuit les itérations en reprenant la fonction objectif initiale
Max $z = 5 x_1 + 7 x_2$
La ligne Delta des valeurs marginales est bien sûr modifiée puisqu'on n'a plus la même fonction économique

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	b_i	ratio
x_2	0	1	-1	1	0	2	
x_1	1	0	0	-1	0	4	
t_3	0	0	1	-1	1	1	
Delta	0	0	7	-2	0	-34	
c_i	7	5	0	0	0		

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	b_i	ratio
x_2	0	1	-1	1	0	2	-2
x_1	1	0	0	-1	0	4	infini
t_3	0	0	**1**	-1	1	1	1
Delta	0	0	7	-2	0	-34	

HB B	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	b_i	ratio
x_2	0	1	0	0	1	3	
x_1	1	0	0	-1	0	4	
t_1	0	0	1	-1	1	1	
Delta	0	0	0	5	-7	-41	

La solution optimale obtenue est donc infinie puisqu'une variable HB a une valeur marginale négative et tous ses coefficients positifs ou nuls dans le tableau.
Il suffit de prendre x_1 infini et $x_2 \leq 3$