TD 1 optimisation programmation linéaire et optimisation

Exercice 1: introduction aux inéquations à deux inconnues

On donne les quatre points E, A, B, C caractérisés par leurs coordonnées :
E(20 ; 10) A(20 ; 50) B(40 ; 30) C(50 ; 10).
1°) Placer ces points dans un repère puis tracer le polygone EABC.
2°) Ecrire les équations de droites (EA), (EC), (AB), (BC).
3°) Ecrire le système de quatre inéquations permettant de caractériser un point intérieur au polygone EABC.

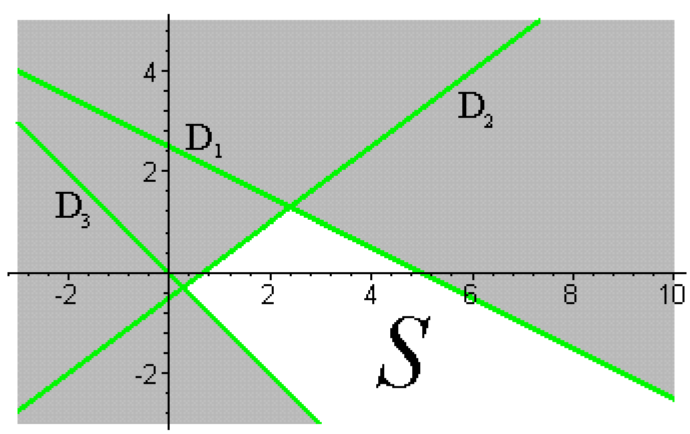
Exercice 2
Représentez graphiquement l'ensemble des points M de coordonnées (x; y) vérifiant les systèmes suivants:

$$a = \begin{cases} 2x + 4y \leq 10 \\ 3x - 4y \geq 2 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

<u>Corrigé:</u>

je représente graphiquement en utilisant les trois droites D_1 , D_2 et D_3 d'équations:

- D_1 : 2x + 4y = 10
- D_2 : 3x - 4y = 2
- D_3 : x + y = 0



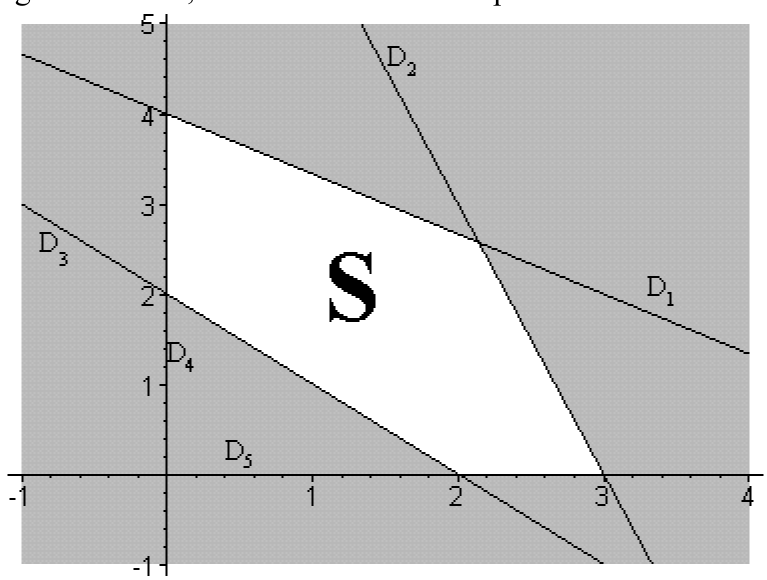
$$b = \begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 9 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Corrigé :

Le système conduit à tracer les cinq droites :

- D_1 : 2x + 3y = 12
- D_2 : 3x + y = 9
- D_3 : x + y = 2
- D_4 : x = 0
- D_5 : y = 0.

Les deux dernières sont les axes des ordonnées et des abscisses.
On obtient alors la figure suivante, en hachurant les demi-plans non-solution:



$$c = \begin{cases} |x + 2y| \leq 6 \\ |x - 2y| \geq 2 \end{cases}$$

Corrigé :

On sait que pour X réel, on a : " | X | ≤ 6 si et seulement si –6 ≤ X ≤ 6".
La première "inéquation" s'écrit donc :

" x + 2y ≥ -6" et " x + 2y ≤ 6

On sait que pour X réel, on a | X | ≥ 2 si et seulement si "X ≥ 2" ou " X ≤ -2".
La deuxième "inéquation s'écrit donc :

" x - 2y ≥ 2 " ou " x - 2y ≤ -2 "

Le système s'écrit alors :

$$(s_1) = \begin{cases} x + 2y \leq +6 \\ x + 2y \geq -6 \\ x - 2y \leq -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (s_2) = \begin{cases} x + 2y \leq +6 \\ x + 2y \geq -6 \\ x - 2y \geq +2 \end{cases}$$

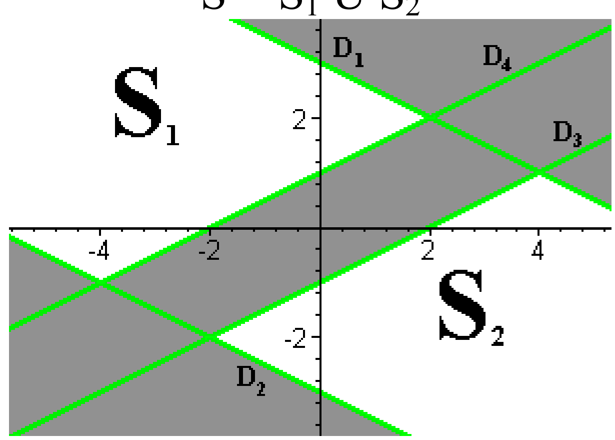
On considère donc les quatre droites suivantes :

- D_1 : x + 2y = 6
- D_2 : x + 2y = - 6
- D_3 : x - 2y = - 2
- D_4 : x - 2y = 2

On trace alors ces quatre droites.
On hachure, pour chacun de ces deux "systèmes" (S_1)" et "(S_2)" les demi-plan non-solution.
Pour le système "(S_1)", on obtient une partie $\mathbf{S_1}$ du plan.
Pour le système "(S_2)", on obtient une partie $\mathbf{S_2}$ du plan.

La partie du plan solution du système initial est alors la réunion de ces deux parties.

$S = S_1 \cup S_2$



Exercice 3

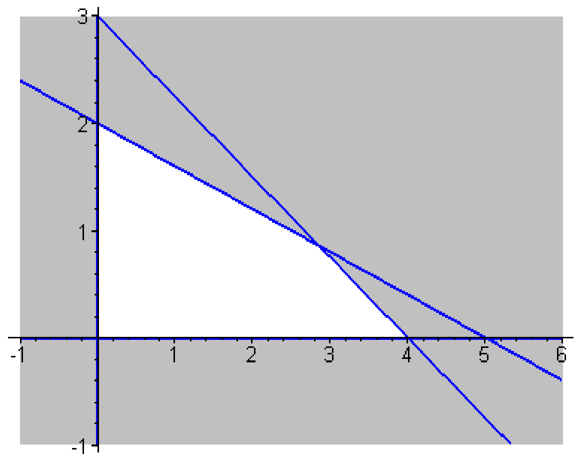
Déterminer le maximum de $(x + 3y)$ sous les contraintes suivante :
$2x + 5y \leq 10$
$3x + 4y \leq 12$
$x > 0$
$y > 0$

<u>Corrigé :</u>

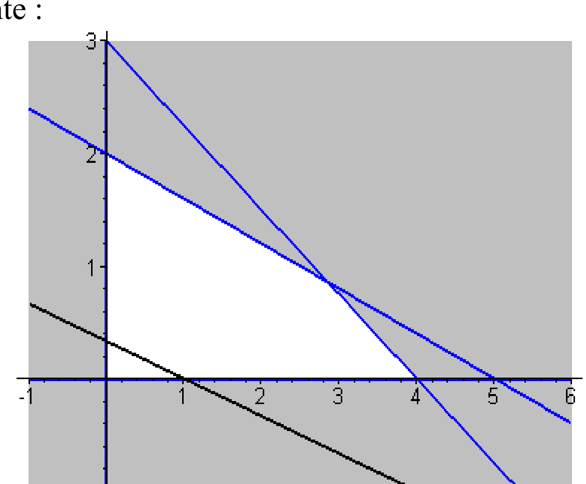
On représente l'ensemble des points vérifiant le système.
Pour cela, on trace les droites:

- D_1 : "x = 0"
- D_2: "y = 0"
- D_3: "2x + 5y = 10 "
- D_4: "3x + 4y = 12 "

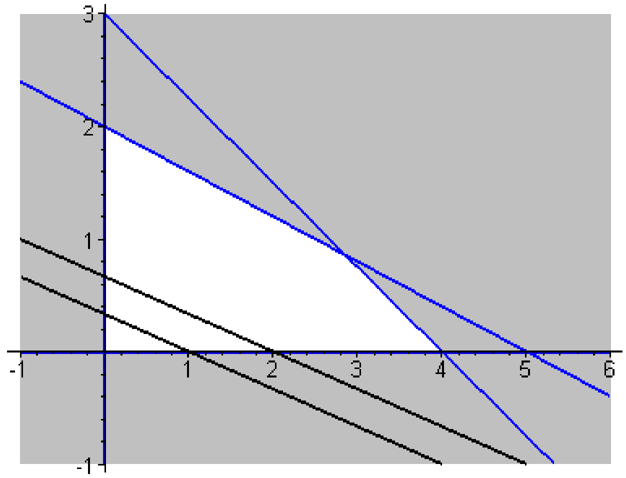
On prend un point test (par exemple le point A de coordonnées : A(1; 1).
On obtient alors la figure suivante:



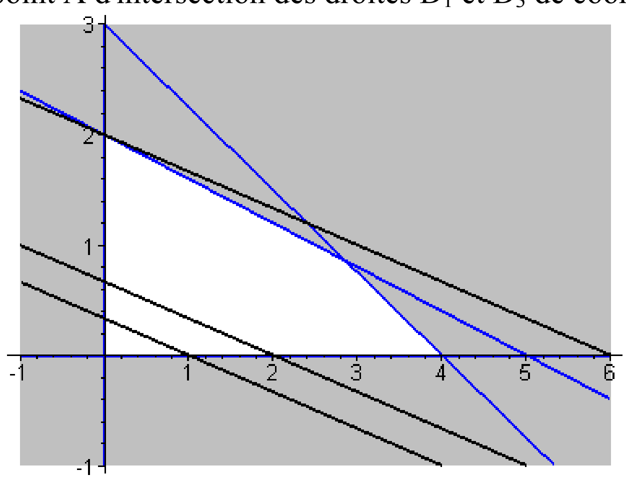
Puis, on trace une droite $\Delta(a)$ d'équation : "x + 3y = a" sur cette figure.
Par exemple, on trace $\Delta(1)$ d'équation : " x + 3y = 1"
On a alors la figure suivante :



Puis on trace une autre droite Δ(a) pour une valeur différente de a.
Par exemple, la droite $\Delta(2)$:



On constate que le fait d'augmenter la valeur de a déplace la droite Δ(a) dans le sens croissant des abscisses.
On cherche alors la droite Δ(a) passant par un point de l'ensemble des contraintes et correspondant à la plus grande valeur possible de a.
Graphiquement, c'est le point A d'intersection des droites D_1 et D_3 de coordonnées A(0;2).



Le maximum de (x + 3y) sous les contraintes (C) est donc atteint pour (x = 0) et (y = 2).
Ce maximum est : (0 + 2*3) = 6

Exercice 4

Déterminer
1. le minimum de $(2x + 3y)$
2. le maximum de $(2x + 3y)$

sous les contraintes suivantes:

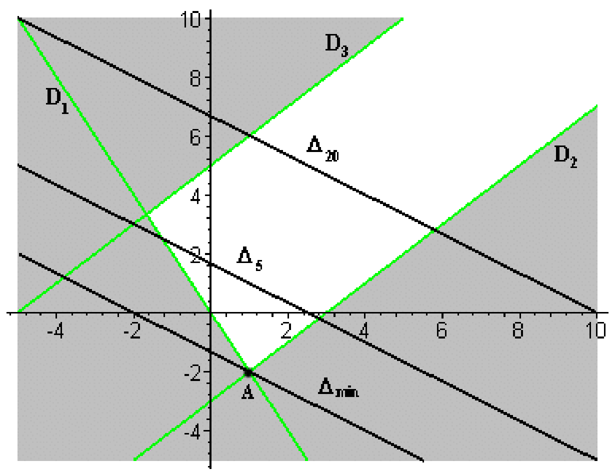
$$\begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x - y \leq 3 \\ x - y \geq -5 \end{cases}$$

Corrigé :

On représente les contraintes (C) en utilisant les droites :

- D_1 :" $2x + y = 0$"
- D_2 : " $x - y = 3$"
- D_3 : " $x - y = -5$"

Puis on utilise les droites Δ_a d'équation " $2x+ 3y = a$".
Sur la figure, on a tracé les droites Δ_{20} et Δ_5.



On constate alors que le point de l'ensemble des contraintes par lequel passe la droite Δ_a avec la valeur "a" minimale est le point A d'intersection entre D_1 et D_2.
Ce point a pour coordonnées : A(1 ; -2).
1. Le minimum de $(2x + 3y)$ sous les contraintes (C) est donc: Min = 2.(1) +3.(-2) = -4
2. Le maximum par contre n'est pas défini car l'ensemble des points respectant toutes les contraintes est ouvert

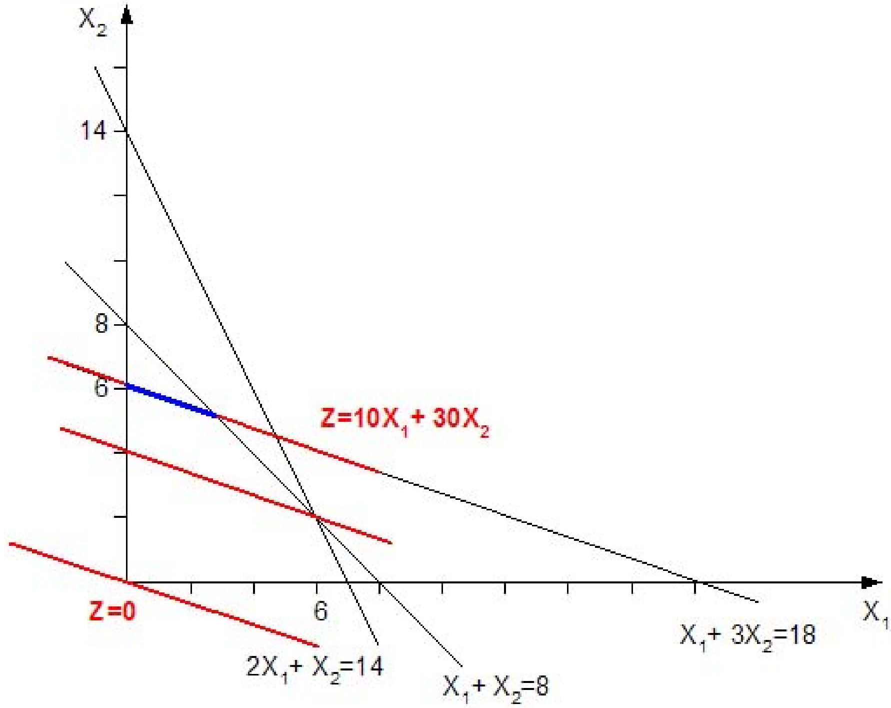
Exercice 5

Déterminer le maximum de $(10\, x_1 + 30\, x_2)$

sous les contraintes suivantes:
$x_1 + 3x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$2\, x_1 + x_2 \leq 14$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

Corrigé :

L'ensemble de solutions est défini sur la portion de la droite d'équation $x_1 + 3x_2 = 18$ du domaine des solutions acceptables



Exercice 6

Une usine fabrique deux produits 1 et 2. Chaque produit passe dans trois ateliers : Atelier A, Atelier B, Atelier C.

On connaît la consommation horaire d'énergie nécessaire à l'élaboration de chacun des produits dans chaque atelier:

Consommation	Produit 1	Produit 2
Atelier A	1	2
Atelier B	1	1
Atelier C	1	0

On connaît pour chacun des produits le bénéfice effectué sur sa vente:

	Produit 1	Produit 2
Bénéfice	2	1

Supposons, maintenant que la consommation horaire d'énergie dans chaque atelier soit limitée :

Energie (Atelier A) ≤ 6
Energie (Atelier B) ≤ 4
Energie (Atelier C) ≤ 3

Trouver la production horaire (de chacun des produits) qui maximise le bénéfice, compte tenu de la restriction de consommation.

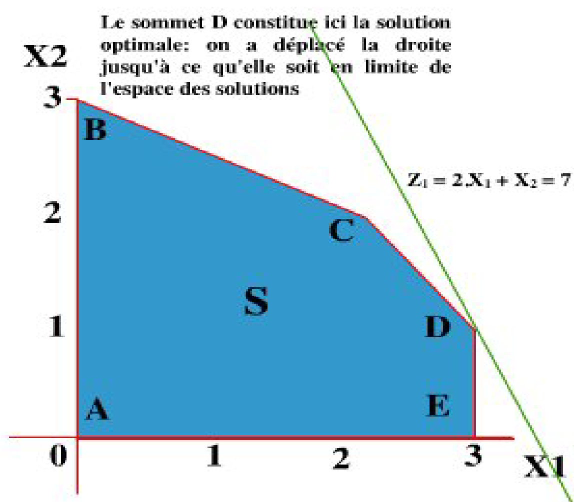
Corrigé :

On note Z le bénéfice horaire et X_1 et X_2 les quantités horaires produites par chacun des ateliers

Fonction linéaire à maximiser : $\mathbf{Z = 2X_1 + X_2}$

Contraintes linéaires :

$\mathbf{X_1 + 2.X_2 \leq 6}$
$\mathbf{X_1 + X_2 \leq 4}$
$\mathbf{X_1 \leq 3}$
$\mathbf{X_i \geq 0}$



Exercice 7

Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de:

- 90 draps de bain,
- 240 serviettes et
- 240 gants de toilette

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain , 4 serviettes et 8 gants pour 200 francs.
Une deuxième entreprise vend pour 400 francs un lot B de 3 draps de bains, 12 serviettes et 6 gants de toilettes.

Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots A et y lots B.

1. Traduire par un système d'inéquations les contraintes auxquelles satisfont x et y.
2. Comme x et y doivent être positifs, l'ensemble des contraintes du gérant peuvent alors s'écrire:
3. Quelle est la fonction objectif

Corrigé :

1. Faisons un tableau pour résumer les contraintes du gérant de l'hôtel :

	Lot A x	**Lot B** y	**Contraintes**
Draps	2	3	≥ 90
Serviettes	4	12	≥ 240
Gants de toilette	8	6	≥ 240
Prix du lot	200	400	$200x + 400y$

2. Le système est :

   $2x + 3y \geq 90$
   $4x + 12y \geq 240$
   $8x + 6y \geq 240$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$
3. L'objectif est de minimiser l'expression suivante : $200x + 400y$

Exercice 8
Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles, ou bien des bouquets dont il tire un prix de 50 euros qui comprennent 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ?

Corrigé :

$x + y \leq 5$
$2x + y \leq 8$
$x + 2y \leq 8$
max $4x + 5y$

CONCLUSION

Cette méthode graphique est bien sûr facile à mettre en œuvre lorsqu'il y a deux variables, elle devient plus difficile pour trois variables et impossible au delà.

Une méthode du simplexe a été développée par Dantzig afin de résoudre ces types de problèmes de programmation linéaire