OPTIMISATION LINEAIRE

Support du cours de 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2008-2009

Table des matières

Liste des figures

Chapitre 1

SIMPLEXE:
La méthode des tableaux
- Méthode Géometrique

Problème $(P.O)$ (Problème initial d'optimisation)

Minimiser (ou maximiser) $f(x)$ sous les contraintes:

$$\left\{\begin{array}{lllll} g_i(x) & = & 0 & i \in I^0 & \subset \mathbb{N} \\ g_j(x) & \leq & 0 & j \in I^- & \subset \mathbb{N} \\ g_k(x) & \geq & 0 & k \in I^+ & \subset \mathbb{N},\ x=(x_1,\cdots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n \text{ avec } x_i \geq 0 \end{array}\right.$$

et, où $f,\ g_{\ell(\ell \in I^0 \cup I^- \cup I^+)}$ sont des fonctions linéaires des “variables” x_1,x_2,$\cdots$,x_n ou des formes linéaires définies sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1 Forme standard

Problème $(P.1)$

$$\text{Minimiser } \left(z = c \cdot x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right)$$

avec:

$$Ax = b; \quad x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \quad x_i \in \mathbb{R}^+$$

où
n = nombre de variables indépendantes
m = nombre de contraintes.
$A \in \mathcal{M}(n,m)$, matrice des coefficients des contraintes;
$c = (c_1, c_2\ \ldots,\ c_n)$ vecteur ligne ($\in \mathbb{R}^n$) des coûts.
$b = (b_1, \cdots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ vecteur colonne des 2^{mes} membres.
$z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \Leftrightarrow$ fonction à minimiser ou **“fonction objectif”**.

Proposition 1.1. *Forme standard*

*Un problème $(P.0)$ peut toujours se mettre sous **forme standard** $(P.1)$ par l'outil des "**variables d'écart**" (variables supplémentaires).*
(attention aux signes !!)

Exemple 1.1.

$$\max(f = \overline{(P.O)} \!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\! -5x_1 + 3x_2) \qquad\qquad \text{Forme standard } (P.1) \;\; \min(z = 5x_1 - 3x_2)$$

$$\textit{avec} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{avec} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, \;\; \forall\, i = 1,2,3,4 \\ \textit{avec: } (x_3, x_4) \textit{ variables d'écart} \end{cases}$$

Remarque 1.1.
On suppose par la suite que $rgA = m$

2 Base réalisable -Base optimale

Définition 1.1.
***Polytope convexe**: $X = \{x | Ax = b, \; x \geq 0\}$*
*$\Leftrightarrow$ **Simplexe***
Polytope borné $\Leftrightarrow$ ***Polyèdre convexe***

Définition 1.2.
*x **Point extrême** de X*
$\Leftrightarrow$
x ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire d'autres points de X.

Définition 1.3.
***Base** : toute sous matrice $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de A qui a le même rang que la matrice A:*

$$rgA = rgB = m$$

donc :

$$A = [B, N] \;\; \textit{et} \;\; BX_B + NX_N = b$$

*où X_B $\Leftrightarrow$ l'ensemble des **"variables (vecteurs) de base"** et*
*X_N $\Leftrightarrow$ l'ensemble des **variables (vecteurs)"hors base"***

Définition 1.4.
***Solution de base** : Elle est obtenue en posant $X_N = 0$*

$$\Rightarrow BX_B = b \;\Rightarrow\; X_B = B^{-1}b$$

Définition 1.5.
Soit B, base de $(P.1)$
***Base réalisable** : si $X_B \geq 0$ ou si $B^{-1}b \geq 0$*

Théorème 1.1.

(i) L'ensemble des points extrêmes d'un polytope convexe X

$$\Leftrightarrow$$

L'ensemble de solutions de bases réalisables.

*(ii) L'**optimum de** z est atteint en <u>au moins 1 point</u> extrême de X.*

Théorème 1.2.

*(i) Une Base de (P.1) est une **base réalisable optimale***

<u>ssi</u>

$$\bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} \geq 0$$

*($\bar{C}_N \equiv$ **vecteur ligne des coûts réduits des variables hors base**).*

(ii) Si B est une base réalisable quelconque, soit x_0 la solution correspondante.

*Si $\underline{\exists\, x_h} \in X_N$ hors base t.q. $\bar{c}_h < 0$ alors <u>ou bien</u> optimum = $-\infty$ ou bien on met en évidence une autre base $\hat{B}$ (**changement de base** (v. aussi Th.correspondant cours 1^{re} année Algèbre Ch.1) réalisable ayant comme solution correspondante $\hat{x}$ t.q*

$$z(\hat{x}) < z(x_0)$$

Remarque 1.2. Voir plus loin fig. 1.1 la représentation sous forme de "tableau" de tous ces vecteurs et matrices du simplexe.

3 Le tableau du simplexe

La méthode des tableaux du simplexe permet d'appliquer toutes les étapes de l'algorithme du simplexe sous forme d'une sequence de tableaux représentés par la figure 1.1.

Cette sequence converge vers la solution optimale lue sur le **dernier tableau** d'après le critère (i) du Théorème 1.2.

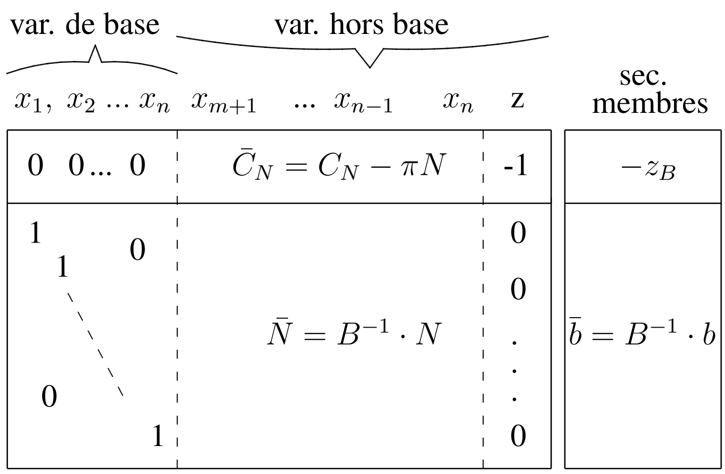

FIG. 1.1: Schéma d'un tableau du simplexe à une étape k de l'algorithme

4 L'algorithme du simplexe $\Leftrightarrow$ la sequence des tableaux

On présente l'algorithme du simplexe (tel qu'on le retrouve dans toutes les références récentes (v. listes des références de la section 3)). Nous mettons parallèlement en évidence (entre parenthèse) son application directe sur la construction des **tableaux successifs**, du type de la figure 1.1.

Avant d' appliquer l'algorithme on doit mettre le problème d'optimisation sous forme standard avec tous les seconds membres $b_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, 2 \ldots, m$ et parallèlement avoir établi le premier tableau du simplexe sous la forme décrite par la figure précédente (v. fig. 1.1).

Soit B_0 une base réalisable de départ.

D'après cette hypothèse le tableau ci-dessus donne au départ $\bar{N} = N$, et $\bar{b} = b$.

Etapes de l' algorithme "primal" du simplexe

(a) *B_0 base réalisable de départ. Itération $k = 0$.*

($\Leftrightarrow$ 1^{er} **tableau du simplexe** et lecture de la solution de base réalisable B_0)

(b) $k \leftarrow k + 1$

($\Leftrightarrow$ **Nouveau tableau** après changement de base)

(c) *à l'itération k soit B la base et $x = [x_B, x_N]$ la solution correspondante.*
Calculer: (v. fig. 1.1)

$$\left\| \begin{array}{rcl} \bar{b} & = & B^{-1}b \\ \pi & = & C_B B^{-1} \\ \bar{C}_N & = & C_N - \pi N \end{array} \right.$$

($\Leftrightarrow$ **Lecture sur le nouveau tableau** de la solution de base et du vecteur de coûts réduits $\bar{C}_N$)

(d) (1) *Si $\bar{C}_N \geq 0, STOP$: l'optimum est atteint.*
($\Leftrightarrow$ **Application du critère (i)** Th.1.2 du vec. de coûts réduits $\bar{C}_N$)

(2) *Si $\exists \ x_e \in X_N$* t.q. $\bar{c}_e < 0$ *alors*
($\Leftrightarrow$ **Application du critère (ii)** Th.1.2)

(e) *Soit A_e la colonne $|e|$ de A. Calculer $\bar{A}_e = B^{-1}A_e$;*

si $\bar{a}_{ie} \leq 0 \ \forall \ i = 1, \cdots, m$ STOP: optimum non borné $(-\infty)$
sinon calculer : $\hat{\vartheta} = \hat{b}_s/\hat{a}_{se} = \min\limits_{\bar{a}_{ie}>0} \left\{\bar{b}_i/\bar{a}_{ie}\right\}$

$\Leftrightarrow$

Changement de base (sous-étape A) :

Variable entrante x_e t.q. $\bar{c}_e \leq \bar{c}_j \ \forall \ j = 1, 2 \ldots, n$

Variable sortante:

-Sur la colonne de x_e écrire le système d'équations de toutes les (contraintes)-lignes du tableau t.q. $\bar{a}_{ie} > 0$

ATTENTION!!! *seulement* les variables de base, *doivent contribuer à ce système d'équations.*

-Evaluer le minimum des rapports des seconds membres avec les coefficients correspondants:

$$\hat{\vartheta} = \frac{\hat{b}_s}{\hat{a}_{se}} = \min_{\bar{a}_{ie}>0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ie}} \right\}$$

La variable de base qui correspond à ce **minimum** $\dfrac{\hat{b}_s}{\hat{a}_{se}}$ sera la variable sortante.

-Si ce minimum n'existe pas (car $\bar{a}_{ie} \leq 0 \; \forall i = 1, 2 \ldots, m$ alors le tableau sera le dernier et la solution n'existe pas (minimum $-\infty$).)

(f) Soit x_s la variable de base correspondant à la $s^{\text{ième}}$ ligne de la base (et qui a fournit le minimum $\hat{\vartheta}$ de l'étape précédente), alors :

$$B^{-1}A_e = \hat{e}_s = s^{\text{ième}} \text{ ligne } \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_s \\ x_e \end{array} \right.$$

avec: x_s variable sortante de la base

et: x_e variable entrante dans la base

Calcul de l'inverse de la nouvelle base et retour en (b).

(Changement de base **sous étape B**):
-On détermine le **pivot** pour le changement de base:
C'est l'élément du tableau qui correspond à la **colonne de la variable entrante et la ligne de la variable sortante:** $\hat{a}_{se}$
- On applique l' échelonnage: (V. cours Ch.1 Algèbre) sur les lignes du dernier tableau,

$$\left\| \begin{array}{c} L'_s = \dfrac{L_s}{\bar{a}_{se}} \\ \text{et} \\ \forall\, i = 1, 2 \ldots m+1 \quad \text{avec } m \neq s \\ L'_i = -\bar{a}_{ie} L'_s + L_i \end{array} \right.$$

et on obtient le nouveau tableau qui correspond à la nouvelle base,
et qui est le retour à l'étape b) de l'algorithme.)

5 Intérêt des "tableaux du simplexe"

L'algorithme devient plus commode avec l'usage des
"Tableaux du simplexe"1.1 car:

(1) La solution de base s'obtient par lecture directe : sur chaque ligne i du tableau (correspondant à la variable de base x_i^B) on lit $\underline{x_i^B = \bar{b}_i}$

(v.fig.1.1).

(2) La valeur $\underline{z_B}$ de la fonction objectif est contenue dans la case en haut et à droite du tableau (avec le signe -) (v.fig. 1.1)

(3) Les composantes du vecteur des coûts réduits des variables hors-base $\bar{C}_N$ sont obtenues par lecture directe de la première ligne du tableau de simplexe. Elles permettent en particulier de voir immédiatement si la solution de base courante est optimale. (rappel: il faut $\bar{C}_j \geq 0 \; \forall x_j$ hors base d'après le théorème 1.2)

1 Exemple d'application de la méthode de Dantzig par les tableaux successifs du simplexe

Soit le problème d'optimisation

$$\max(z = 8x_1 + 5x_2)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 6x_2 & \leq & 30 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 + 6x_2 & \leq & 42 \\ x_1 \geq 0 & ; & x_2 \geq 0 \end{array} \right\} (P.0)$$

Etape ((O)) : Forme standard

$$\min(w = -z = -8x_1 - 5x_2)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + 6x_2 + x_3 & = & 30 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 & = & 15 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_5 & = & 42 \\ \text{où } x_1 \geq 0 \,; \quad i & = & 1, 2, \cdots 5 \end{array} \right\} (P.1)$$

$\boxed{x_3, x_4, x_5}$ variables d'écart.

Etape ((1)) : 1^{er} tableau du simplexe

V. hors Base — Var. de Base

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	Second Membre	
-8	-5	0	0	0	-1	0	(L_1)
3	6	1	0	0	0	30	(L_2)
3	1	0	1	0	0	15	(L_3)
5	6	0	0	1	0	42	(L_4)

Base B_0

Base initiale réalisable :

$$B_0 = \{x_3; x_4; x_5\}$$

Solution de Base B_0

$$\left. \begin{array}{rcl} \tilde{x}_3 & = & 30 \\ \tilde{x}_4 & = & 15 \\ \tilde{x}_5 & = & 42 \\ \tilde{x}_1 & = & 0 \text{ car hors base} \\ \tilde{x}_2 & = & 0 \text{ car hors base} \end{array} \right\} \text{et } \underline{w = 0}$$

Mais ! cette solution n'est pas optimale car:

$$\underset{-8}{\bar{C}_1 < 0} \quad \text{et} \quad \underset{-5}{\bar{C}_2 < 0}$$

Il faut changer la base :

a) variable “entrante” x_1

b) variable “sortante” ?

(trouver $\hat{\vartheta}$ qui minimise les contraintes de x_1)

$$\boxed{\text{Attention } x_2 = 0 \text{ toujours car il est hors base}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\vartheta + 6\times 0 + x_3 &=& 30 \\ 3\vartheta + 0 + x_4 &=& 15 \\ 5\vartheta + 0 + x_5 &=& 42 \end{array}\right| \begin{array}{rcl} \Leftrightarrow \quad \hat{\vartheta} &=& \min\limits_{r\geq 0}\{\frac{30}{3};\frac{15}{3};\frac{42}{5}\} \\ \Rightarrow \quad \hat{\vartheta} &=& 5 \end{array}$$

$$3\times 5 + x_4 = 15 \iff \underline{x_4 = 0}$$
$$\Rightarrow x_4 \text{ variable “sortante”}$$

* Nouvelle base : $\underline{B_1 = \{x_1; x_3; x_5\}}$
* Ecrire le tableau du simplexe explicité par rapport à B_1.
Opérations sur les lignes du $\mathbf{1}^{er}$ tableau;

(il faut retrouver la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui correspond à B_1)

$\Rightarrow$ Echelonnage

* Pivot : l’élément de la colonne (x_1) qui correspond à la ligne (L_3) (car x_4 sort !)
donc :

$$\begin{array}{rcll} L'_3 &=& L_3/3 & \text{(pour avoir 1 à } (x_1)) \\ L'_1 &=& 8L_3/3 + L_1 & \text{(pour avoir 0 à } (x_1)) \\ L'_2 &=& -L_3 + L_2 & \text{(pour avoir 0 à } (x_1)) \\ L'_4 &=& -\dfrac{5}{3}L_3 + L_4 & \text{(pour avoir 0 à } (x_1)) \end{array}$$

2^{me} tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	Second Membre	
0	-7/3	0	8/3	0	-1	40	(L'_1)
0	5	1	-1	0	0	15	(L'_2)
1	1/3	0	1/3	0	0	5	(L'_3)
0	13/3	0	-5/3	1	0	17	(L'_4)

Base$B_1 = \{x_3; x_1; x_5\}$
Solution de Base B_1

$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{x}_3 &=& 15 \\ \tilde{x}_1 &=& 5 \\ \tilde{x}_5 &=& 17 \\ \tilde{x}_4 &=& 0 \text{ car hors base} \\ \tilde{x}_2 &=& 0 \text{ car hors base} \end{array}\right\} \text{ et } \underline{w = -40}$$

Mais ! cette solution n’est pas optimale car le coût réduit:

$$\bar{C}_2 = -\frac{7}{3} < 0$$

Il faut changer la base :

a) variable “entrante” x_2

b) variable “sortante” ?

(trouver $\hat{\vartheta}$ qui minimise les contraintes de x_2)

$$\begin{cases} 5\vartheta + x_3 + 0x_4 &= 15 \\ x_1 + \vartheta/3 + 0x_3 + 0x_4 &= 5 \\ 0x_1 + 13/3\,\vartheta + 0x_4 + x_5 &= 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\vartheta} = \min_{r\geq 0}\{\frac{15}{5}; 5\times 3; \frac{17\times 3}{13}\} = \frac{15}{5} = 3$$

$$3\times 5 + x_3 = 15 \iff \underline{x_3 = 0}$$

$\Rightarrow x_3$ variable “sortante”

* Nouvelle base : $B_2 = (x_1; x_2; x_5)$
* Ecrire le tableau du simplexe explicité par rapport à B_2.
$\Rightarrow$ Echelonnage
* Pivot : l'élément de la colonne (x_2) qui correspond à la ligne (L_2) (car x_3 sort !)
donc :

$$\begin{array}{lcll} L'_2 &=& L_2/5 & \text{(pour avoir 1 à } (x_2)) \\ L'_1 &=& 7L_2/15 + L_1 & \text{(pour avoir 0 à } (x_2)) \\ L'_3 &=& -L_2/15 + L_3 & \text{(pour avoir 0 à } (x_2)) \\ L'_4 &=& -\frac{13}{15}L_2 + L_4 & \text{(pour avoir 0 à } (x_2)) \end{array}$$

3ème tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w	Second Membre
0	0	7/15	11/5	0	-1	47
0	1	1/5	-1/5	0	0	3
1	0	-1/15	2/5	0	0	4
0	0	-13/5	-4/5	1	0	4

Solution de Base

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1^* &=& 4 \\ x_2^* &=& 3 \\ x_5 &=& 4 \\ \tilde{x}_4 &=& 0 \text{ car hors base} \\ \tilde{x}_3 &=& 0 \text{ car hors base} \end{array}\right\} \Rightarrow -w^* = z^* = 47$$

$\Rightarrow$

Solution optimale car : $\boxed{\bar{C}_i \geq 0\ \forall i}$

Fin de l'algorithme.

2 Méthode Géometrique-Cas à 2 dimensions.

1 Méthode Graphique

On présente maintenanant la **méthode Géométrique** (ou **Graphique**) (à 2 dimensions) de la **Programmation linéaire** et comparaison avec la méthode algébrique dite des tableaux du simplexe étudiée précédemment.

Problème (P.O)

$$\max(z = 8x_1 + 5x_2)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + 6x_2 & \leq & 30 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 15 \\ 5x_1 + 6x_2 & \leq & 42 \\ x_1 \geq 0\,;x_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}$$

- a) Sur le plan $(0x_1x_2)$, on trace les droites qui correspondent aux contraintes du problème:

$$\begin{array}{ll} D_1 : 3x_1 + 6x_2 = 30 & (A_1(0;5); B_1(10;0)) \\ D_2 : 3x_1 + x_2 = 15 & (A_2(0;15); B_2(5;0)) \\ D_3 : 5x_1 + 6x_2 = 42 & (A_3(0;7); B_3(6;2)) \end{array}$$

- b) La région de l'ensemble des solutions (S) v.fig. 1.2 est obtenue en vérifiant si l'origine $O = (0,0)$ satisfait ou pas, les contraintes du problème.

  CONSEIL: Hachurer les régions interdites!!!!

  Pour l'exemple présent le "simplexe" de la solution est défini par les sommets $\{O,\ A,\ K,\ B_2\}$ autrement dit: les "points extrêmes " du simplexe qui sont d'après le théorème 1.1 les solutions de bases réalisables.

- c) *Famille des droites parallèles à la fonction objectif :*

$$\underline{8x_1 + 5x_2 - z = 0}$$

  On choisit le représentant pour $\underline{z = 0}$

$$8x_1 + 5x_2 = 0 : \underline{D_0} \left\{ \begin{array}{c} 0(0;0) \\ C(5;-8) \end{array} \right\}$$

  La droite $D_{zmax} \parallel D_0$ passant par $\underline{K}$ fig.(1.2) (obtenue par translation parallèlement en elle même), maximise la fonction objectif z car elle a la plus grande ordonnée à l'origine parmi les droites parallèles à D_0 et

$$K = D_1 \cap D_2 \text{ donc :}$$
$$K(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ solution du système :}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 6x_2 = 30 \\ 3x_1 + x_2 = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x}_1 = 4 \\ \bar{x}_2 = 3 \end{array}$$

  $\Rightarrow$ $\underline{K(4;3)}$ sommet du "simplexe" OA_1KB_2 (v.fig. 1.2) solution des contraintes de (P.O).

2 Conclusions

a) $z_{max} = 8 \times 4 + 5 \times 3 = 32 + 15 = 47$
$\underline{z_{max} = 47}$ et D_{zmax} : $8x_1 + 5x_2 = 47$
et ordonnée à l'origine de D_{zmax} : $x_2^0 = \dfrac{47}{5} = 9,4$ point $D(0;9,4)$ sur la figure 1.2

b) La solution est évidemment la même obtenue par la méthode des tableaux du simplexe (v.section 1)

c) Le déplacement de la droite représentative D_0 (parallèlement en elle-même) d'un sommet du "simplexe" à l'autre représente géométriquement le changement de bases réalisables par la méthode des tableaux du simplexe (v.section **??**. et 1) .

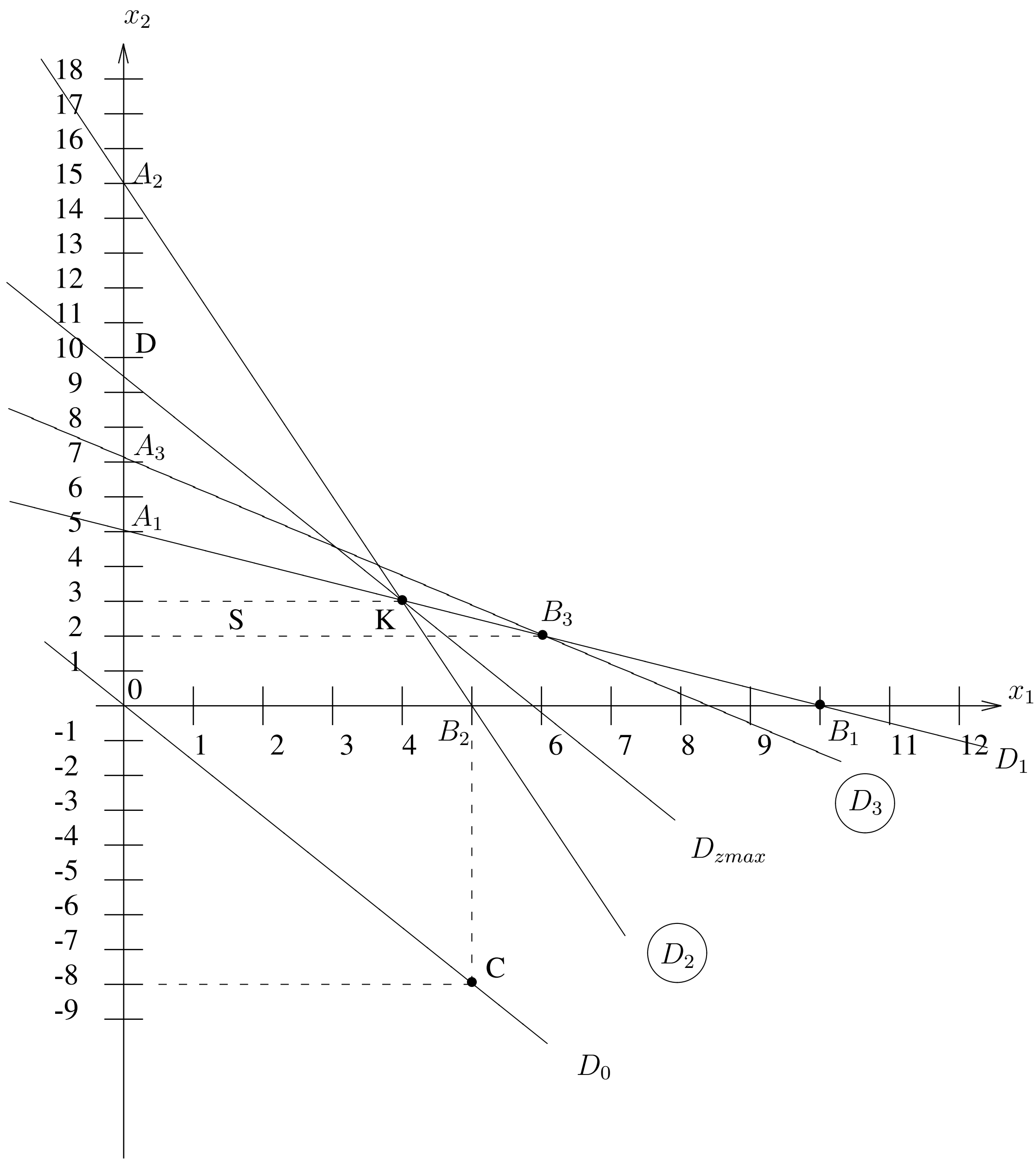

FIG. 1.2: La solution géometrique du simplexe

3 Références

a) G.DANTZIG

"Linear programming and Extensions"

Princeton, N.J.Princeton, University Press, 1963

b) R.FAURE

"Précis de Recherche Opérationnelle ",

Dunod (Paris 1979)

c) S.GASS

"Linear Programming: Méthods and Applications", 5^{th} edition New York : Mc Graw-Hill 1985

d) M. MINOUX (1975)

Programmation Mathématique (Dunod)

e) M. MINOUX (1975)

Programmation Linéaire
(Cours de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris)

f) C. PAPADIMITRIOU and K.STEIGLITZ

"Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity" Englewood Cliffs , N.J. Prentice-Hall 1982

g) A. W. TUCKER

Recent advances in Mathematical Programming
(Mc GRAW-HILL, New York)

g) W.L.WINSTON

" Operations Research: Applications and Algorithmes" PWS-KENT 1991

Chapitre 2

Algorithme du Simplexe-Techniques avancées et Applications A. Pénalités et Variables Artificielles

1 Méthode des Pénalités et Variables Artificielles

1 Construction d'une Base Réalisable

Exemple 2.1. *Le problème des mines d'or (voir $T.P.2$) :*
On a le problème (P.1)

$$x \Leftrightarrow \textit{j.mine A}$$
$$y \Leftrightarrow \textit{j.mine B}$$

$$(\mathbf{P.1}) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \min(Z = 200x + 200y) \\ x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \qquad \begin{array}{c} \underline{\textit{Solution}} \\ x^* = 40 \\ y^* = 20 \\ z^* = 12000 \\ \textit{(voir méthode géometrique)} \end{array}$$

$\Rightarrow$ ***Premier tableau***

x	y	x_3	x_4	x_5	Z	*sec. m.*
200	200	0	0	0	-1	0
-1	-2	1	0	0	0	-80
-3	-2	0	1	0	0	-160
-5	-2	0	0	1	0	-200

Base $B_0(x_3, x_4, x_5)$ non réalisable

Remarque importante
Le problème d'une base non réalisable peut se présenter plus généralement quand certaines contraintes sont des égalités.

2 Méthode

(i) On utilise de nouvelles variables $\{x_a\}_{i \in I_a}$ appelées : Variables Artificielles.

Pour chaque contrainte où la solution de base est négative ou la variable de base n'existe pas.

(ii) On affecte un coefficient $M \in \mathbb{R}^+$ (Pénalité) et $M \gg 1$ (très grand) à chacune des variables artificielles dans la fonction objectif.

Pour l'exemple des mines d'or, on aura donc le "nouveau problème" :

$$\min(\tilde{Z}_M = 200x + 200y + M[x_1^a + x_2^a + x_3^a)]$$

$$(\mathbf{P.2}) \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x + 2y - x_3 + x_1^a = 80 \\ 3x + 2y - x_4 + x_2^a = 160 \\ 5x + 2y - x_5 + x_3^a = 200 \\ x, y, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \quad \text{et } x_i^a (i = 1, 2, 3 \geq 0 \\ M \gg 1 \end{array} \right\}$$

(iii) On remplace ensuite dans la fonction objectif chacune des variables artificielles par son expression obtenue par la contrainte correspondante, comme fonction des variables initiales et les variables d'écart.

On résoud ensuite le nouveau problème $(P.2)'$ par la méthode habituelle des tableaux du simplexe.

Et voici par le résultat suivant, la justification de la méthode présentée ci-dessus.

Théorème 2.1.
Si l'ensemble des solutions (P.1) est non vide alors il existe un nombre réel positif $M \gg 1$ *(suffisamment grand) tel que les problèmes (P.1) et (P.2) sont équivalents.*

2 Exemple-Application

Exemple 2.2.
Résoudre : (P.3)

$$\min(Z = x_1 - x_2) \qquad (1)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (2) \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 & (3) \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 & (4) \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 & \end{array} \right\}$$

Variables artificielles x_1^a, x_2^a et $M \gg 1$ et construction d'une base réalisable :

(P.3)'

Soit $M \gg 1$

$$\min(W_M = x_1 - x_2 + M(x_1^a + x_2^a))$$

$$\text{avec} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_1^a = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_2^a = 3 \\ x_i \geq 0;\ \forall\, i = 1 \cdots 4 \quad x_j^a \geq 0; \quad \forall j = 1,2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^a &= -x_1 + 2x_2 - x_4 + 1 \\ x_2^a &= 3 - 2x_1 - x_2 - x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^a + x_2^a = -3x_1 + x_2 - 2x_4 + 4$$

et

$$\Rightarrow \tilde{W}_M = -(3M-1)x_1 + (M-1)x_2 - 2Mx_4 + 4M$$

$\Rightarrow$ (P.2)'

$$\min(\tilde{W}_M = -(3M-1)x_1 + (M-1)x_2 - 2Mx_4 + 4M_4)$$

avec

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_1^a = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_2^a = 3 \\ x_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1 \cdots 4; \quad x_j^a \geq 0 \quad \forall\, j = 1,2 \quad M \gg 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 1^{er} tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	W	s.m.
-(3M-1)	M-1	0	-2M	0	0	-1	-4M
-2	1	1	0	0	0	0	2
$\boxed{1}$	-2	0	1	1	0	0	1
2	1	0	1	0	1	0	3

Base réalisable:

$$B_1 = (x_3,\ x_1^a,\ x_2^a)$$

Mais ! cette solution de la base n'est pas optimale car les coûts réduits:

$$\bar{C}_1 < 0;\ \ \bar{C}_4 < 0$$

Il faut changer la base :

var. "entrante" x_1 $(M \gg 1)$
var. "sortante " x_1^a $(\min(1; \frac{3}{2})) = 1)$

$2^{\text{ème}}$ tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	W	s.m.
0	-5M+1	0	M-1	3M-1	0	-1	-M-1
0	-3	1	2	2	0	0	4
1	-2	0	1	1	0	0	1
0	$\boxed{5}$	0	-1	-2	1	0	1

Nouvelle base:

$$B_2 = (x_1,\ x_3,\ x_2^a)$$

Mais encore la solution correspondante n'est pas optimale car le coût réduit:

$$\bar{C}_2 < 0.$$

Il faut changer la base :

var. "entrante" x_2
var."sortante" x_2^a

3ème tableau du simplexe:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	$\tilde{W}$	s.m.
0	0	0	-4/5	M-(3/5)	M-(1/5)	-1	-6/5
0	0	1	7/5	4/5	3/5	0	23/5
1	0	0	3/5	1/5	2/5	0	7/5
0	1	0	-1/5	-2/5	1/5	0	1/5

Nouvelle base:

$$B_3 = (x_1,\ x_2,\ x_3)$$

Mais encore la solution correspondante n'est pas optimale car le coût réduit:

$$\bar{C}_4 < 0.$$

Il faut changer la base :

var."entrante"x_4 var. "sortante " x_1

4ème tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	W	s.m.
4/3	0	0	0	M-(1/3)	M+(1/3)	-1	2/3
-7/3	0	1	0	1/3	-1/3	0	4/3
5/3	0	0	1	1/3	2/3	0	7/3
1/3	1	0	0	1/3	1/3	0	2/3

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x_1^* = 0 \quad x_2^* = 2/3 \quad x_3^* = 4/3 \quad x_4^* = 7/3}$$

Solution optimale car : $\boxed{\bar{C}_i \geq 0\ \forall i}$

Fin de l'algorithme.

Chapitre 3

Algorithme du Simplexe. Techniques avancées et Applications B La Dualité

1 La Dualité

1 Importance

(a) **Point de vue pratique:** Souvent le problème présenté dans l'espace dual est beaucoup plus simple à résoudre, et grâce aux deux théorèmes ci-dessous on trouve la solution correspondante du problème initial.

(b) **Etude de sensibilité**

2 Dual d'un programme linéaire sous forme standard

Primal

$$(P)\quad \left.\begin{array}{l} \text{Min}(z = c \cdot x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (P.1)$$

Dual

$$(D)\quad \left.\begin{array}{l} \text{Max}(w = u \cdot b) \\ \text{avec } (u \cdot A)^T \leq C^T \end{array}\right\} \qquad (D.1)$$

* On associe à chaque contrainte $i (i = 1 \cdots m)$ une variable $u_i > 0$ ou $u_i < 0$ ou $u_i \lesseqgtr 0$

appelée : variable duale

* $u = (u_1,\ u_2, \cdots,\ u_m)$ est un vecteur ligne.

* A^T est la matrice transposée de A (matrice des contraintes du primal).

Remarque 3.1. *On remarque que l'application linéaire qui définit le problème de programmation linéaire dans l'espace dual est exactement la transposée de l'application correspondante qui exprime le problème initial d'optimisation dans l'espace primal.*

3 La transposition

Tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
Fonction Obj. (min)	Second membre
Second membre	Fonction Obj. (max)
A= matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte $i : \leq$ $(i : \geq)$	Variable $u_i \leq 0$ $(u_i : \geq 0)$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtrless 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtrless 0$	Contrainte $j : =$

4 Exemple de "transposition"

Exemple 3.1.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{min}\;(2x_1 - 3x_2) \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \gtrless 0 \end{array}\right\} \qquad \underline{\textit{Primal}}$$

$$\underline{\textit{Dual}}\left\{\begin{array}{l} \textit{max}\;(u_1 + 4u_2 + 3u_3) \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 2 \\ -u_1 + 3u_2 + u_3 = -3 \\ u_1 \leq 0\;;\; u_2 \geq 0\;;\; u_3 \gtrless 0 \end{array}\right.$$

2 Les Théorèmes

Théorème 3.1. *DUALITE*
Soient : un programme lin. (P) et le programme (D) associé $\Rightarrow$

(a) Si (P) et (D) ont des solutions, alors $\exists$ *une solution optimale pour chacun d'eux et :*

$$z^* = \mathit{min}\ (P) = \mathit{max}\ (D) = W^*$$

(b) Si l'un d'eux a un optimum non borné l'autre n'a pas de solution.

Théorème 3.2. *COMPLEMENTARITE*
Deux solutions (x^*, u^*) *du primal et du dual respectivement sont optimales ssi*

$$(u^* \cdot A_j - C_j)x_j^* = 0 \qquad \forall\, j = 1, \cdots, n$$

$$(A_j = j^{\grave{e}me} \mathit{colonne\ de}\ A)\ \mathit{o\grave{u}}\ j^{\grave{e}me} \mathit{ligne\ de}\ A^T.$$

* Une autre expression du théorème 2 $\Rightarrow$

Théorème 3.3. *(Théorème de complémentarité ou "Principe d'Exclusion")*
Si un programme linéaire a des contraintes d'inégalités (le (D) ou (P)) alors :

* *Une variable duale correspondant à une contrainte non saturée (de (P)) est **nécessairement** nulle.*

* *A une variable duale strictement positive correspond nécessairement une contrainte saturée.*

* *Sur le dernier tableau de (P) les coûts réduits des variables d'écart correspondent aux solutions* u_i^* *de (D).*

3 Utilité de la Dualité- Etude de sensibilité

$(u_i \Leftrightarrow$ coûts marginaux$)$

On considère le problème du primal (P) comme une famille de problèmes paramétrée par le second membre b.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min}(z = c \cdot x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(P(b))}$$

On étudie donc les variations de la valeur optimale $z^*(b)$ de $P(b)$ en fonction de b. Soit B une base optimale pour le primal $P(b)$ (à b fixé) et soit ,

$$u^* = c_B \dot{B}^{-1}$$

le vecteur des variables duales optimales.

Si $b' = b + \Delta b$ (variation des sec. membres du primal), on aura:

u^* qui sera toujours la solution optimale du dual(indépendante de b, et, b') qui vérifie:

$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

et pour $\|\Delta b\|$ suffisamment petit :

$$z((b + \Delta b) \overset{\text{dualité}}{=} u \cdot (b + \Delta b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial b_i} = u_i$$

d'où:

L'interprétation de la variable duale u_i comme:
variation unitaire $\Delta b_i = 1$ du second membre de la i-ème contrainte.
(coûts marginaux)

4 Solution avec la dualité

Exemple: "LE JARDINIER" Simplexe - Dualité (corrigé)

Le problème dual s'écrit :

$$\max(F = 10u_1 + 12u_2 + 12u_3)$$

$$\text{(P) avec } \left\{ \begin{array}{l} 5u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 3 \\ u_1 + 2u_2 + 4u_3 \leq 2 \\ u_i \geq 0 \; \forall \, i = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$$

Forme standard :

$$\min(W = -10u_1 - 12u_2 - 12u_3)$$

$$\text{(P.1) avec } \left\{ \begin{array}{l} 5u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4 = 3 \\ u_1 + 2u_2 + 4u_3 + u_5 = 2 \\ u_i \geq 0 \; \forall \, i = 1, 2, \cdots, 5 \end{array} \right\}$$

1^{er} Tableau : Base $B_1 = \{u_4, u_5\}$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	W	s.m.
-10	-12	-12	0	0	-1	0
5	2	1	1	0	0	3
1	2	4	0	1	0	2

Base non optimale $\Rightarrow$ Changement de Base
Variable entrante u_2
Variable sortante u_5 (car : min=2/2)
$\Rightarrow$ 2ème Tableau : Base $B_2 = \{u_4, u_2\}$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	W	s.m.
-4	0	12	0	6	-1	12
4	0	-3	1	-1	0	1
1/2	1	2	0	1/2	0	1

Base non optimale $\Rightarrow$ Changement de Base
Variable entrante u_1
Variable sortante u_4 (car : min=1/4)
$\Rightarrow$ 3$^{\text{ème}}$ Tableau : Base $B_3 = \{u_1, u_2\}$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	W	s.m.
0	0	9	1	5	-1	13
1	0	-3/4	1/4	-1/4	0	1/4
0	1	19/8	-1/8	5/8	0	7/8

Base optimale $\Rightarrow$ Solution de Base

$$\{u_1^* = 1/4;\ u_2^* = 7/8\}$$

et $u_3^* = 0, u_4^* = 0$ (car var. hors base).

Complément (sur l'exemple)

(a) Trouver le dual du dual (primal)

(b) Par application du principe de complémentarité (direct), trouver la solution de ce dernier problème.

Réponse

(a)

$$\min(z = 3x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{array}{l} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

(b) Sur le dernier tableau du simplexe, on lit :

$$\begin{array}{rl} & x_1^* = \bar{c}_4 = 1 \\ & x_2^* = \bar{c}_5 = 5 \\ \text{et} & z^* = -w = 13 \end{array}$$

Chapitre 4

Algorithme du Simplexe. Techniques avancées et Applications C Programmation en nombres entiers. Méthode des coupes

1 Programmation en nombres entiers La méthode des coupes

1 Congruences

Exemple 4.1.

$$\min(Z = -10x_1 - 11x_2)$$

$$\textit{avec} \begin{cases} 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ x_i \geq 0 \textit{ et entiers} \\ \forall\, i = 1, 2. \end{cases}$$

Rappel:
Congruences ou classes d'équivalence <u>modulo k</u> (entier positif)

Définition 4.1.

(i) *Soit $b \in \mathbb{Z}$: On dit que $a \in \mathbb{N}$ est une <u>classe d'équivalence</u> (<u>congruence</u>) de b <u>modulo $k \in \mathbb{N}^*$</u> ssi:*

$$b - a = rk \qquad (r \in \mathbb{Z})$$

$\Leftrightarrow b - a$ multiple entier de k.

(ii) *$\exists\, k$ classes d'équivalence distinctes*

$$\forall\, k\ : a \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$$

(iii) Notation :

$$b \equiv a\mathit{mod}\,[k] \Leftrightarrow b \equiv a[k] \Leftrightarrow b \equiv a(k)$$

Exemples

(1) $-3 \equiv a\; mod[2]$

il faut : $-3 - 1 = \underbrace{(-1)2}_{r} \times \underbrace{2}_{k} = -4$

$$\Rightarrow \quad a = 1$$
$$\Rightarrow \quad -3 \equiv 1[2]$$

(2) $8 \equiv 0\; mod[2]$.

2 Méthode des coupes

1 Nouvelles contraintes -"coupes"

Supposons que la solution du problème (P) n'est pas entière. Alors on peut créer de nouvelles contraintes

$$\begin{cases} \text{Gomory} & (1958) \\ \text{Gondrau} & (1973) \end{cases}$$

des "coupes" de telle façon que la solution optimale du problème continu ne vérifie pas ces contraintes-coupes.

Si les coupes sont correctement choisies à chaque étape, le polyèdre $\mathcal{P}$ (initial) sera ainsi progressivement réduit jusqu'à coïncider avec l'enveloppe convexe des solutions entières au moins au voisinage de la solution optimale.

La solution continue du problème augmenté deviendra alors entière et le problème sera résolu.

Choix des coupes ?

2 Méthode des congruences décroissantes

Soit (P_0)

$$\left.\begin{array}{rcl} Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}\right\}$$

$\exists \quad \beta_i$ entier, α_{ij} entiers t.q.

si $\underline{x_i \text{ var. base}}$
et $J \equiv \{$ensemble des indices des variables hors base$\}$

$$x_i = \frac{\beta_i}{D} - \sum_{j \in J} \frac{\alpha_{ij}}{D} x_j \tag{4.2.1}$$

$$x_j = 0\ (j \in J)\ ;\ \underbrace{x_i}_{i \in I} = \frac{\beta_i}{D}$$

où

$$D = |\text{det. } (B)| \qquad \text{(B s. matr. de A)}$$

$$(I \equiv \{\text{ens. des ind. des var. de base.}\})$$

On veut : x_i entier

$$\Leftrightarrow \ Dx_i = \beta_i - \sum \alpha_{ij} x_j \tag{4.2.2}$$

$\Leftrightarrow$ (Congruences)

$$\Leftrightarrow \ \sum \ \alpha_{ij} x_j \equiv \beta_i \ \text{mod}[D] \tag{4.2.3}$$

Soit $|y|_D$ le représentant de y (Classe d'équiv. ou congruence mod. D)

$$\Rightarrow \quad \exists \quad s \geq 0 : \\ \sum_{j \in J} f_j x_j = f_0 + sD$$

où $f_j = |\alpha_{ij}|_D$ et $f_0 = |\beta_i|_D$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{j \in J} f_j x_j \geq f_0 \tag{4.2.4}$$

Contrainte vérifiée par toute solution entière de la programmation en nombres entiers.

Remarque 4.1. *La contrainte n'est pas vérifiée par la solution de base courante puisque* $x_j = 0$ $(\forall\, j \in J)$.

$$\Rightarrow \qquad 4.2.4$$

est bien une coupe.

Avec l'algorithme primal-dual, on pivote sur un élément $f_{j_0}/D \neq 0$ $(j_0 \in J)$ (j_0 indice de la variable qui rentre dans la base)

$\Rightarrow$ Le nouveau déterminant

$$D' = D \times f_{j_0}/D = f_{j_0} \leq D - 1$$

Si la solution qu'on obtient n'est pas entière,

$$\Rightarrow$$

on impose une nouvelle condition d'intégrité ,

$\Rightarrow$on obtient une nouvelle equation de congruence mais dans un groupe : $\{0, \cdots, D'-1\}$ l'ordre D' $<$ à l'ordre D.

Donc **nécessairement** en un nombre fini d'étapes, on arrive à une solution entière duale-primale réalisable.

$$\Leftrightarrow$$

Méthode des "Congruences décroissantes" (Gonbrau 1973).

3 Exemple–Application

Supposons que le dernier tableau du simplexe qui fournit la solution optimale du problème ($\mathcal{P}$)-continu est :

x_1	x_2	x_3	Z	s.m.
0	1	1	-1	59
1	12/10	1/10	0	59/10

$$\Rightarrow$$

Solution non réalisable (car x_1n'appartient pas à $\mathbb{N}$)

1 étape 1

On veut : x_i entier

$$\begin{array}{ll} \Leftrightarrow & x_1 = \frac{59}{10} - \frac{12}{10}x_2 - \frac{x_3}{10} \quad \text{entier} \\ \Leftrightarrow & 12x_2 + x_3 \equiv 59[\text{mod. } 10] \\ \Leftrightarrow & 2x_2 + x_3 \equiv 9[\text{mod. } 10] \end{array}$$

$\Rightarrow$ la meilleure coupe

$$2x_2 + x_3 \geq 9 \tag{4.3.5}$$

$\Rightarrow$ nouvelle variable d'écart

$$x_4 \Leftrightarrow 2x_2 + x_3 - x_4 = 9$$

Algorithme primal-dual

x_1	x_2	x_3	x_4	Z	s.m.
0	1	1	0	-1	59
1	12/10	1/10	0	0	59/10
0	-2	-1	1	0	-9

Base $B_1(x_1, x_4)$ "Duale réalisable" mais pas "Primale réalisable". C'est la raison pour laquelle on utilisera l'algorithme Primal-Dual.

$\Rightarrow$ Variable sortante x_4 et variable entrante :

$$\min_{j \in J} \left\{ -\frac{C_j}{\ell_j} \right\} = -\frac{C_{j_0}}{\ell_j}, \quad \text{avec } \; l_j < 0$$

$$\Rightarrow \; \min \left\{ -\frac{1}{-2} \; ; \; \frac{-1}{-1} \right\} = \frac{1}{2}$$

donc on va faire entrer la variable x_2

$\Rightarrow$ base : $B_2\{x_1, x_2\}$

$\Rightarrow$ nouveau tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	Z	s.m.
0	0	1/2	1/2	-1	54,5
1	0	-1/2	+12/20	0	1/2
0	1	1/2	-1/2	0	9/2

$$x_1^* = 1/2 \quad x_2^* = 9/2$$

$\Rightarrow$ Solution primale réalisable mais pas entière $\Rightarrow$ pas optimale
$\Rightarrow$ On applique la méthode des coupes à nouveau etc...

2 étape 2

$\Rightarrow$ 2ème coupe : $x_3 + x_4 \geq 1$.
On obtient le tableau : $\Rightarrow$ (var. d'écart x_5)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	s.m.
0	0	1/2	1/2	0	-1	54,5
1	00	-1/2	12/20	0	0	1/2
0	1	1/2	-1/2	0	0	9/2
0	0	-1	-1	1	0	-1

Base $B_3(x_1,\ x_2,\ x_5)$ non réalisable

$\Rightarrow$ variable sortante x_5, variable entrante (choix : x_3)
changement de base
$\Rightarrow$ nouveau tableau :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	s.m.
0	0	0	0	1/2	-1	54
1	0	0	11/10	-1/2	0	1
0	1	0	-1	1/2	0	4
0	0	1	1	-1	0	1

Remarque

Il est intéressant de porter sur un graphique les contraintes qui correspondent aux coupes :
1ère coupe : $2x_2 + x_3 \geq 9$ (C.1)

(En éliminant x_3 par
$x_3 = 59 - 10x_1 - 12x_2$)

$$\Rightarrow \quad -10x_1 - 10x_2 \geq -50$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x_1 + x_2 \leq 5}$$

2ème coupe : $x_3 + x_4 \geq 1$

$$x_4 = -9 + 2x_2 + x_3$$
$$x_3 = 59 - 10x_1 - 12x_2$$
$$\Rightarrow \quad x_3 + x_4 = 109 - 20x_1 - 20x_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{10x_1 + 11x_2 \leq 54}$$

Chapitre 5

EXERCICES

1 TD

T.D.1 : PROGRAMMATION LINEAIRE
ALGORITHME DU SIMPLEXE ET APPLICATIONS
A). **Variables Artificielles - Méthode des Pénalités**

1

Pour les deux problèmes suivants, a) Trover la solution par application de la méthode géometrique,

b) Pourquoi on ne peut pas entamer l'algorithme des tableaux du simplexe?

c) établir le 1^{er} tableau du simplexe par la méthode des pénalités et continuer pour résoudre ces probl 'emes.

i) (P.0.1)

$$\min(W = x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_1 \geq 0 \quad \forall\, i = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$$

ii) (P.0.2)

$$\min(Z = x_1 - 2x_2)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \\ x_1 \geq 0 \quad \forall\, i = 1, 2 \end{array} \right\}$$

2

Une compagnie américaine possède deux mines d'or, A et B, dont les productions journalières sont données par le tableau suivant (unité : 1 tonne).

Qualité	Mine A	Mine B
Haute	1	2
Moyenne	3	2
Basse	5	2

La compagnie a besoin de :
80 tonnes d'or de haute qualité, 160 tonnes d'or de qualité moyenne et 200 tonnes d'or de basse qualité.

Les entrepreneurs de la compagnie, s'interrogent sur le nombre de jours que chacune des mines doit fonctionner, si le coût journalier de la production est de 200 dollars pour la mine A et de 200 dollars pour la mine B.

i) Formaliser mathématiquement ce problème d'optimisation. Donner la solution du primal en programmation linéaire par la méthode géométrique. Interpréter votre résultat. Etablir le premier tableau de la méthode du simplexe, ayant une base réalisable.

ii) Résoudre le problème des mines d'or par la méthode des pénalités.

T.D.2 : PROGRAMMATION LINEAIRE
ALGORITHME DU SIMPLEXE ET APPLICATIONS
B). **Dualité - Principe d'exclusion (Complémentarité)**

Rappel : tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
$\min(Z = cx)$	$\max(W = ub)$
$Ax = b \quad x > 0$ A= matrice des contraintes	$(uA)^T \leq c^T$ A^T (transp. de A) matr. des contr.
Contrainte $i : \geq$	Variable $u_i \geq 0$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtreqless 0$
Contrainte $i : \leq$	Variable $u_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtreqless 0$	Contrainte $j : =$

1

Etablir le dual du problème d'optimisation suivant :

$$\max(F = x_1 + 2x_2)$$

(P) avec $\left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

2

Un jardinier Californien a besoin de 10, 12, et 12 unités d'éléments chimiques A, B, C respectivement pour son jardin. Un produit liquide contient 5, 2, et 1 unités d'éléments A, B, C respectivement par litre, alors qu'un produit solide contient 1, 2, 4, unités de A, B, C respectivement par carton.

Si le produit liquide se vend au prix de 3 dollars par litre et le produit solide au prix de 2 dollars par carton, on étudie quelle serait la meilleure solution pour que le jardinier minimise son coût.

i) Formaliser mathématiquement ce problème d'optimisation. Donner la solution du primal en programmation linéaire par la méthode géométrique **et** la méthode du simplexe. Interpréter votre résultat.

ii) Etablir le problème dual du i). Résoudre ce nouveau problème par l'algorithme du simplexe.

iii) Comparer la solution du dual obtenue en (ii) avec la solution du primal du (i). Montrer la cohérence de vos résultats par application du théorème de dualité et du principe de complémentarité. Comment pourrait-on obtenir la solution du primal directement par la procédure détaillée faite dans le dual ? Justifier votre réponse.

3

On considère le problème suivant

$$\max(F = 7u_1 + 12u_2 + 10u_3)$$

$$\text{(D) avec} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \leq 0 \\ 3u_1 - 2u_2 - 4u_3 \leq 1 \\ -u_1 + 4u_2 + 3u_3 \leq -3 \\ u_2 \leq 0 \\ 2u_1 + 8u_3 \leq 2 \\ u_3 \leq 0 \end{array} \right\}$$

Il s'agit du dual d'un problème primal dont la solution est :

$$\min(Z) = -11 \ \{0, 4, 5, 0, 0, 11\}$$

Trouver u_1, u_2, u_3 vérifiant le principe de complémentarité (Principe d'exclusion). Vérifier le théorème de Dualité.

T.D.3: PROGRAMMATION LINEAIRE
ALGORITHME DU SIMPLEXE ET APPLICATIONS
C). **Programmation en nombres entiers - Méthodes des coupes**
(Méthode des congruences décroissantes)

1

Soit le problème d'optimisation

$$\min(Z = -10x_1 - 11x_2)$$

(P) avec $\left\{ \begin{array}{c} 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \text{ et entiers } \forall i = 1,2 \end{array} \right\}$

Le tableau ci-dessous est le dernier tableau du simplexe qui fournit la solution optimale du problème continu.

x_1	x_2	x_3	Z	s.m
0	1	1	-1	59
1	12/10	1/10	0	59/10

a) Est-ce-que c'est une solution réalisable pour le problème (P) ?
Donner deux ou trois nouveaux tableaux de simplexe par application de l'algorithme des coupes qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez-vous en conclure déjà ?

b) Porter sur un graphique les contraintes correspondant aux coupes engendrées par l'algorithme, (après élimination de la variable d'écart) sur le plan (x_1, x_2), et trouver le point correspondant à l'optimum entier.

2

Une entreprise de vêtements doit maximiser son profit donné par la fonction :

$$Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

où x_1, x_2 représentent les valeurs entières d'utilité de deux produits différents et qui doivent satisfaire aux contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 \in \mathbb{N} \quad i = 1,2 \end{array} \right\}$$

Par la méthode de programmation linéaire du "simplexe", on obtient comme dernier tableau qui fournit la solution optimale du problème continu, le tableau suivant.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	s.m
0	0	0	1/2	1/2	-1	19/2
0	1	0	3/8	1/8	0	27/8
1	0	0	-1/4	1/4	0	11/4
0	0	1	-3/2	1/2	0	21/6

i) Cette solution serait-elle une solution réalisable pour le problème actuel ? Donner deux nouveaux tableaux du simplexe (application de la méthode des coupes) qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ?

ii) Porter sur un graphique les contraintes correspondant aux coupes engendrées par l'algorithme, (après élimination de la variable d'écart) sur le plan (x_1, x_2), et trouver le point correspondant à l'optimum entier.

3

On considère un problème d'optimisation Dual du problème du jardinier (V.T.D.2) :

$$\max(F = 10x_1 + 12x_2 + 12x_3)$$

$$(\text{P}) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{c} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \text{ et entiers } \forall i = 1,2,3 \end{array} \right\}$$

Le tableau ci-dessous est le dernier tableau du simplexe qui fournit la solution optimale du problème continu. Est-ce-que c'est une solution réalisable pour le problème (P) ? Donner deux ou trois nouveaux tableaux de simplexe par application de l'algorithme des coupes qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ?

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	s.m
0	0	9	1	5	-1	13
1	0	-3/4	1/4	-1/4	0	1/4
0	1	19/8	-1/8	5/8	0	7/8

T.D.4: PROGRAMMATION LINEAIRE
ALGORITHME DU SIMPLEXE ET APPLICATIONS
REVISIONS

TECHNIQUES SIMPLEXE:
Meth. Pénalités- Dualité- Coupes

Une société d'aéronautique a reçu quelques commandes pour construire deux types d'avions A et B. Comme l' entreprise désire maximiser son profit, elle doit décider quel est le meilleur choix du nombre x_1 d'avions du type A qu'elle doit construire et le nombre x_2 d'avions du type B tout en respectant les contraintes de temps, de coût et certaines conditions du marché international.

La fonction du bénéfice Z et les contraintes correspondantes sont représentées comme il suit:

$$Z(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2$$

$$\text{sous les contraintes: } \left\{ \begin{array}{c} -4x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ \\ x_i \geq 0, \forall\, i = 1, 2 \\ \text{et entiers.} \end{array} \right\}$$

i) Etablir le problème dual du problème précédent et écrire le premier tableau du simplexe qui correspond à une base réalisable de ce problème dual.

ii) La solution du problème primal ci-dessus par la méthode géométrique est donné par le graphe suivant: (v.fig.**??**)

$$Z^* = 2.5 \text{ avec } X_1 = 0;\ x_2 = 2.5$$

En tenant compte de cette solution du primal, résoudre le problème dual par le théorème de "Dualité" et le "Principe de Complémentarité".

iii) Le tableau ci-dessous est le dernier tableau du simplexe qui fournit la solution continue du problème primal.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W	s.m
$26/10$	0	$1/10$	0	0	-1	$25/10$
$-4/10$	1	$1/10$	0	0	0	$25/10$
$24/10$	0	$-1/10$	1	0	0	$75/10$
$16/10$	0	$1/10$	0	1	0	$85/10$

Puisqu'on exige que les valeurs de la solution x_1^*, x_2^* soient entières est-ce-que dans ce cas les valeurs de ce tableau fournissent une bonne solution?
Donner deux nouveaux tableaux du simplexe par application de l'algorithme des coupes qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ?

iii)Porter sur le graphique initial votre nouvelle coupe. Interpréter votre résultat.

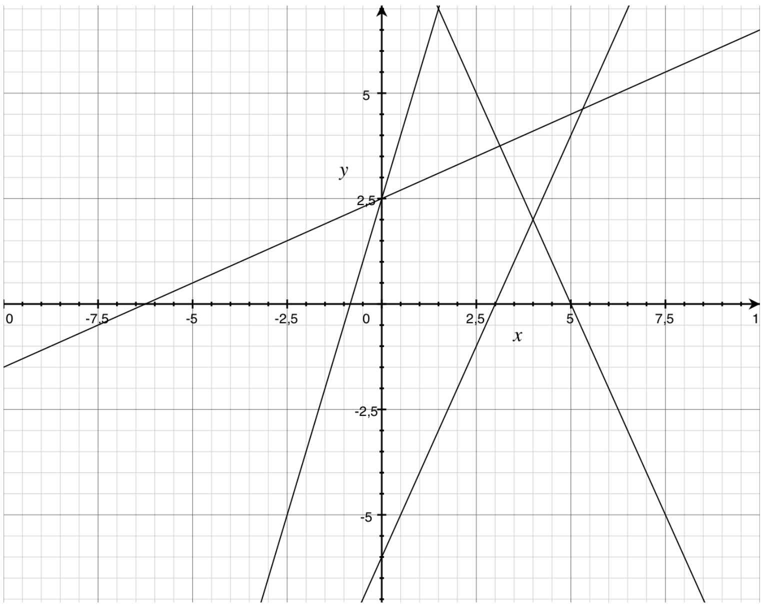

FIG. 5.1: Solution continue du primal

2 EXERCICES de REVISIONS

Exercices de Révisions

TECHNIQUES SIMPLEXE I:
Meth. Pénalités- Dualité- Coupes

Une société d'aéronautique a reçu quelques commandes pour construire deux types d'avions A et B. Comme l' entreprise désire maximiser son profit, elle doit décider quel est le meilleur choix du nombre x_1 d'avions du type A qu'elle doit construire et le nombre x_2 d'avions du type B tout en respectant les contraintes de temps, de coût et certaines conditions du marché international.

La fonction du bénéfice Z et les contraintes correspondantes sont représentées comme il suit:

$$Z(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2$$

$$\text{sous les contraintes: } \left\{ \begin{array}{c} 3x_1 + 6x_2 \leq 21 \\ \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ \\ x_i \geq 0, \forall\, i = 1, 2 \\ \text{et entiers.} \end{array} \right\}$$

i) Etablir le problème dual du problème précédent et écrire le premier tableau du simplexe qui correspond à une base réalisable de ce problème dual.

ii) Le tableau ci-dessous est le dernier tableau du simplexe qui fournit la solution continue du problème primal. Donner la solution du dual par application des théorèmes de dualité et de complémentarité.

x_1	x_2	x_3	x_4	W	s.m
1	0	$2/3$	0	-1	14
$3/6$	1	$1/6$	0	0	$21/6$
$3/2$	0	$1/6$	1	0	$13/2$

Puisqu'on exige que les valeurs de la solution x_1^*, x_2^* soient entières est-ce-que dans ce cas les valeurs de ce tableau fournissent une bonne solution?
Donner deux nouveaux tableaux du simplexe par application de l'algorithme des coupes qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ?

Rappel : tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
$\min(Z = cx)$	$\max(W = ub)$
$Ax = b \quad x > 0$ A= matrice des contraintes	$(uA)^T \leq c^T$ A^T (transp. de A) matr. des contr.
Contrainte $\quad i : \geq$	Variable $u_i \geq 0$
Contrainte $\quad i : =$	Variable $u_i \gtrless 0$
Contrainte $\quad i : \leq$	Variable $u_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtrless 0$	Contrainte $j : =$

II

TECHNIQUES SIMPLEXE:
Meth. Pénalités- Dualité- Coupes

Une société d'aéronautique a reçu quelques commandes pour construire deux types d'avions A et B. Comme l' entreprise désire maximiser son profit, elle doit décider quel est le meilleur choix du nombre x_1 d'avions du type A qu'elle doit construire et le nombre x_2 d'avions du type B tout en respectant les contraintes de temps, de coût et certaines conditions du marché international.

La fonction du bénéfice Z et les contraintes correspondantes sont représentées comme il suit:

$$Z(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$$

sous les contraintes: $\left\{ \begin{array}{c} 5x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ \\ 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ \\ x_i \geq 0, \forall\, i = 1,2 \\ \text{et entiers.} \end{array} \right\}$

i) Etablir le problème dual du problème précédent et écrire le premier tableau du simplexe qui correspond à une base réalisable de ce problème dual.

ii) Le tableau ci-dessous est le dernier tableau du simplexe qui fournit la solution continue du problème primal. Donner la solution du dual par application des théorèmes de dualité et de complémentarité.

x_1	x_2	x_3	x_4	W	s.m
$1/2$	0	$1/2$	0	-1	$15/2$
$5/6$	1	$1/6$	0	0	$15/6$
$17/6$	0	$1/6$	1	0	$11/2$

Puisqu'on exige que les valeurs de la solution x_1^*, x_2^* soient entières est-ce-que dans ce cas les valeurs de ce tableau fournissent une bonne solution?
Donner deux nouveaux tableaux du simplexe par application de l'algorithme des coupes qui pourraient vous approcher de la vraie solution. Pourriez vous en conclure déjà ?

Rappel : tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
$\min(Z = cx)$	$\max(W = ub)$
$Ax = b \quad x > 0$ A= matrice des contraintes	$(uA)^T \leq c^T$ A^T (transp. de A) matr. des contr.
Contrainte $i : \geq$	Variable $u_i \geq 0$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtreqless 0$
Contrainte $i : \leq$	Variable $u_i \leq 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtreqless 0$	Contrainte $j : =$