OPTIMISATION

1ère année ingénieurs

rachid.chelouah@eisti.fr

OPTIMISATION

- **Concepts de base: recherche opérationnelle**
- **Programmation linéaire**
- **Méthode du simplexe**
- **Logiciels (**Scilab, Solveur Excel, Solveur SAS, LINDO, Eclipse**)**
- **Variables artificielles et pénalités**
  - ✓ **Méthode du grand M**
  - ✓ **Méthode des 2 phases**
- **Dualité**
- **Programmation en nombres entiers**
- **Programmation en nombres binaires**
- **Heuristiques**
  - ✓ **Algorithmes génétiques**
  - ✓ **Algorithme de colonie de fourmis**
  - ✓ **Algorithme de recherche tabou**

VARIABLES ARTIFICIELLES

- **Cas $\geq$**
  - $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + a_{i3}\, x_3 + \ldots + a_{in}\, x_n \geq b_i$
  - Ajout d’une variable d’écart
  - $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + a_{i3}\, x_3 + \ldots + a_{in}\, x_n - x_m = b_i$
  - Coefficient de la variable d’écart négatif ne peut servir comme variable de base
  - Ajout d’une variable artificielle
  - $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + a_{i3}\, x_3 + \ldots + a_{in}\, x_n - x_m + x_a = b_i$

VARIABLES ARTIFICIELLES

- **Cas =**
  - L’ajout d’une variable artificielle permet l’insertion d’une variable de base dans la solution de départ
  - Les variables artificielles sont éliminées de la solution en leur assignant une pénalité importante dans la fonction objective

RÉSOLUTION

Méthode du grand M

- Pénaliser les variables artificielles en leur affectant un coefficient de valeur très élevée dans la fonction économique
  - \- M pour un problème à maximum,
  - \+ M pour un problème à minimum.
- Les pénalités ont pour objet de provoquer l'élimination des variables artificielles au fil des itérations.
- Normalement, à l'optimum (s'il existe) les variables artificielles sont hors base. Si celles-ci sont à l'optimum dans la base, avec une valeur non nulle, le programme n'a pas de solution.

Méthode des deux phases

Phase 1 : résolution du problème auxiliaire pour trouver une solution de base réalisable

Phase 2 : Partir de cette solution pour résoudre le problème original

Rappel

Forme canonique	*Forme standard*
$\max\ z = c\,x$	$\max\ z = c\,x + 0\,s$
sc	sc
$A\,x \leq b$	$A\,x + I\,s = b$
$x \geq 0$	$x\,,\,s \geq 0$

Question : Contraintes $\geq$ ou **=** $\rightarrow$ ***forme standard ??***

RESOLUTION DU PL STANDARD

- **Analyse d'un exemple :**

Canonique

$$\max\ z = -2x_1 - 4x_2$$

sc

$$x_1 + 5x_2 \leq 80$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Standard

$$\max\ z = -2x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

sc

$$x_1 + 5x_2 + s_1 = 80$$
$$4x_1 + 2x_2 - s_2 = 20$$
$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

RESOLUTION DU PL STANDARD

- **Analyse d'un exemple :**

$$\max\ z = (\,-2\ \ -4\ \ 0\ \ 0\,)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

sc

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x\ ,\ s \geq 0$$

Standard

$$\max\ z = -2x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

sc

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + s_1 \quad &= 80 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad - s_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 \quad &= 10 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

RESOLUTION DU PL STANDARD

- **Analyse d'un exemple :**

$$\max \quad z = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

sc

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x \ , \ s \geq 0$$

matrice de base ???

une matrice carrée inversible

INTRODUCTION DES PENALITES

$$\max\ z = -2x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

sc

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + s_1 \quad &= 80 \\ 4x_1 + 2x_2 \quad - s_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 \quad &= 10 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

INTRODUCTION DES PENALITES

$$\max\ z = -2x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 - M a_2 - M a_3$$

sc

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + s_1 &= 80 \\ 4x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 + a_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, a_2, a_3 \geq 0$$

GENERALISATION

$$\max \; z = cx + 0s - Ma$$

sc

$$\left(A \mid \{I^{j}\} \mid \{I^{k}\} \right) \begin{pmatrix} x \\ s \\ a \end{pmatrix} = b$$

$$x, s, a \geq 0$$

METHODE DU GRAND M

- **Soit à résoudre le programme linéaire suivant sous sa forme canonique**

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3\,x_1 + 10\,x_2 \\ 5\,x_1 + 6\,x_2 \geq 10 \\ 2\,x_1 + 7\,x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0\;;\quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **Forme standard**

$$\begin{cases} \text{Min } z = 3\,x_1 + 10\,x_2 + 0\,s_1 + 0\,s_2 + M\,a_1 + M\,a_2 \\ 5\,x_1 + 6\,x_2 - 1\,s_1 + 0\,s_2 + 1\,a_1 + 0\,a_2 = 10 \\ 2\,x_1 + 7\,x_2 + 0\,s_1 - 1\,s_2 + 0\,a_1 + 1\,a_2 = 14 \\ x_1 \geq 0\;;\quad x_2 \geq 0\;;\quad s_1 \geq 0\;;\quad s_2 \geq 0;\quad a_1 \geq 0\;;\quad a_2 \geq 0 \end{cases}$$

METHODE DU GRAND M

Tableau 0

hors base base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b_i
a_1	5	6	-1	0	1	0	10
a_2	2	7	-	-1	0	1	14
z	-3	-10	0	0	-M	-M	0

On les ramène à 0

Tableau 1

hors base base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b_i
a_1	5	6	-1	0	1	0	10
a_2	2	7	-	-1	0	1	14
z	3-7M	10-13M	M	M	0	0	-24M

METHODE DU GRAND M

Puisqu'on cherche un minimum, la variable entrante est celle qui a le plus grand coefficient négatif, c-à-d, x_2. Il suffit de regarder les coefficient de M car M est très grand.

hors base base	x_1	**x_2**	s_1	s_2	a_1	a_2	b_i	ratio
a_1	5	**6**	-1	0	1	0	10	5/3
a_2	2	7	-	-1	0	1	14	2
z	3-7M	10-13M	M	M	0	0	-24M	

Tableau 2

hors base base	x_1	x_2	**s_1**	s_2	a_1	a_2	b_i	ratio
x_2	5/6	1	-1/6	0	-	0	5/3	-10
a_2	-23/6	0	**7/6**	-1	-	1	7/3	2
z	-16/3 +(23/6)M	0	5/3 –(7/6)M	M	-	0	-50/3 –(7/3)M	

METHODE DU GRAND M

Tableau 3

hors base / base	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	b_i
x_2	6/21	1	0	-1/7	-	-	2
s_1	-23/7	0	1	-6/7	-	-	2
z	-1/7	0	0	30/21	-	-	-20

On a atteint la solution réalisable qui est : $\begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ s_1 = 2,\ s_2 = 0; \\ z = 20 \end{cases}$

On continue avec la méthode simplexe pour obtenir la solution optimale

Remarque : Dans le cas particulier de cet exemple qui était sous forme standard, il aurait été plus rapide de traiter le problème dual et d'en déduire la solution du primal initial

METHODE A DEUX PHASES

Cette méthode permet de tenir compte des variables artificielles.

1. On rend nulles les variables artificielles en minimisant la somme des variables artificielles sous les contraintes du programme initial.

<u>Remarque</u> : Comme les variables artificielles sont forcément positives ou nulles le minimum est atteint quand elles sont nulles (si ce n'est pas le cas, c'est qu'il n'y a pas de solution).

2. Une fois les variables artificielles annulées, on a une solution de base admissible qui nous permet dans une seconde phase de résoudre le programme initial.

METHODE A DEUX PHASES

- **Proposition :**
  - Phase I : éliminer les variables artificielles et trouver une solution de base réalisable initiale pour le problème originel .

    $\Downarrow$

    P^a **-** maximiser une “sous-fonction objectif ” formée seulement des variables artificielles
  - Phase II : optimiser le problème originel P en prenant <u>la solution finale de P^a</u> comme la solution de base réalisable initiale de P.

L'EXEMPLE : Phase I

P^a : max z^a = $- a_2 - a_3$

sc

$$\begin{aligned}
x_1 + 5\,x_2 + s_1 &= 80\\
4\,x_1 + 2\,x_2 - s_2 + a_2 &= 20\\
x_1 + x_2 + a_3 &= 10
\end{aligned}$$

$$x_1 ,\ x_2 ,\ s_1 ,\ s_2 ,\ a_2 ,\ a_3 \geq 0$$

$x^B = (s_1 \;\; a_2 \;\; a_3)$

$x^N = (x_1 \;\; x_2 \;\; s_2)$

$c^B = (\,0 \;\; -1 \;\; -1\,)$

$c^N = 0$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$z^N - c^N = c^B N - c^N = (\,-5 \;\; -3 \;\; 1\,)$

$\overline{z} = c^B b = -30$

L'EXEMPLE : Phase I

Tableau initial :

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	
z^a	1	-5	-3	0	1	0	0	-30
s_1	0	1	5	1	0	0	0	80
a_2	0	4	2	0	-1	1	0	20
a_3	0	1	1	0	0	0	1	10

Après 1er pivotage :

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	
z^a	1	0	-1/2	0	-1/4	5/4	0	-5
s_1	0	0	9/2	1	1/4	-1/4	0	75
x_1	0	1	1/2	0	-1/4	1/4	0	5
a_3	0	0	1/2	0	1/4	-1/4	1	5

L'EXEMPLE : Phase I

Après 2ème pivotage :

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	
z^a	1	0	0	0	0	1	1	0
s_1	0	0	0	1	-2	2	-9	30
x_1	0	1	0	0	-1/2	1/2	-1	0
x_2	0	0	1	0	1/2	-1/2	2	10

$(z_j^N - c_j^N) \geq 0, \forall j \Rightarrow$ solution optimale $\Rightarrow$ max $z^a = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^{B^a} = (\mathbf{s_1}\ \ \mathbf{x_1}\ \ \mathbf{x_2}) = (30\ \ 0\ \ 10) \\ x^{N^a} = (\mathbf{s_2}\ \ \mathbf{a_2}\ \ \mathbf{a_3}) = 0 \end{array}\right\}$$

pas de variable artificielle dans la base

$\Downarrow$

solution de base réalisable initiale pour P

L'EXEMPLE : Phase II

$$\left.\begin{array}{l} x^B = (\mathbf{s_1} \;\; \mathbf{x_1} \;\; \mathbf{x_2}) = (30 \;\; 0 \;\; 10) \\ x^N = (\mathbf{s_2}) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbf{c^B = (0 \;\; -2 \;\; -4)} \\ \mathbf{c^N = 0} \end{array}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z^N - c^N = c^B N - c^N = (-1)}$$

$$\mathbf{\overline{z} = c^B b = -40}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	0	0	0	**-1**	**-40**
s_1	0	**0**	**0**	**1**	**-2**	**30**
x_1	0	**1**	**0**	**0**	**-1/2**	**0**
x_2	0	**0**	**1**	**0**	**1/2**	**10**

L'EXEMPLE : Phase II

Tableau initial :

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	0	0	0	-1	-40
s_1	0	0	0	1	-2	30
x_1	0	1	0	0	-1/2	0
x_2	0	0	1	0	1/2	10

Après 1er pivotage :

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	1	0	2	0	0	-20
s_1	0	0	4	1	0	70
x_1	0	1	1	0	0	10
s_2	0	0	2	0	1	20

$(z_j^N - c_j^N) \geq 0, \forall j$

$\Rightarrow$ solution optimale

METHODE A DEUX PHASES - RESUME

$\max z^a = -a \quad ; \quad a \geq 0 \Rightarrow z^a \leq 0$ ou

valeur maximale de $z^a = 0$

Cas 1 :

si $\max z^a < 0 \Rightarrow$

$\exists \; a_k \neq 0 \Rightarrow$

P ne possède pas de solution de base réalisable

Cas 2 :

si $\max z^a = 0 \Rightarrow a_k = 0, \forall k$

$\Rightarrow$ solution optimale de P^a est une solution réalisable de P

(pas forcément de base)

METHODE A DEUX PHASES - RESUME

Analyse du cas 2 :

» **si a_k est hors base ,$\forall$ k $\Rightarrow$ solution de base réalisable de P**

- si $\exists$ k tel que a_k est dans la base

  $\Rightarrow$ solution optimale de P^a n'est pas une solution de base de P

  $\Rightarrow$ solution optimale de P^a est une solution de base dégénérée

Changement de base (si possible)

Contrainte redondante

LE PROBLEME DE MINIMISATION

- $\min z = cx \Leftrightarrow -\max z' = -cx$

OU

- Condition d'arrêt :

  si $(z_j^N - c_j^N) \leq 0, \forall j$

- Choix de la colonne pivot :

  j telle que $z_j^N - c_j^N = \max_k \{ (z_k^N - c_k^N) ; (z_k^N - c_k^N) > 0 \}$

- Choix de la ligne pivot :

  i telle que $b_i / a_{ij} = \min_l \{ b_l / a_{lj} , a_{lj} > 0 \}$