

THEORIE DES GRAPHS

0) Introduction historique

La théorie des graphes permet de transcrire concrètement des faits en les modélisant à l'aide d'objets mathématiques, afin de résoudre des problèmes tels :

- Les problèmes d'ordonnement, qui ont pour but la recherche d'un ordre optimal des tâches pour une réalisation complexe : il s'agit de trouver un ordre de réalisation des travaux, en minimisant le temps total et le coût total ;
- Les emplois du temps et la répartition des salles ;
- Les problèmes d'affectations (organiser des équipes de travail pour qu'elles soient le plus efficaces possibles) ;
- Les problèmes de maintenance (minimiser les stocks de pièces de rechange, ou les coûts dus à l'arrêt des machines) ;
- Les problèmes de compétition et de concurrence ;
- Les problèmes de classification de produits, ou d'individus.

Le premier problème connu d'utilisation d'un graphe pour résoudre un problème est celui des « 7 ponts de Königsberg », résolu en 1735 par le mathématicien suisse Leonhard Euler :

La ville de Königsberg (Prusse orientale) comptait 7 ponts, disposés selon la figure ci-contre.

L'histoire veut que Léonard Euler, en visite dans cette ville, ait eu à résoudre le problème qui préoccupait fortement ses habitants : Est-il possible de trouver un circuit qui emprunte une fois et une seule chacun des sept ponts de la ville ?

Pour cela, l'idée est de commencer par traduire l'énoncé du problème par un schéma :

Chaque lieu de la ville est repéré par sa position géographique : N pour le nord de la ville ; S pour le sud de la ville, O pour l'ouest et I pour île . Chaque pont sera alors représenté par un « trait » reliant ces lieux entre eux.

Cette modélisation s'appelle un graphe : Qu'est-ce qu'un graphe ? C'est un ensemble de sommets et de liens entre 2 sommets que l'on appelle arêtes.

La traduction du problème de départ en termes de propriétés du graphe est alors : «Peut-on circuler sur le graphe à partir d'un sommet en empruntant une fois et une seule chaque arête ? »

Mais la théorie des graphes a réellement pris son départ pendant la seconde guerre mondiale, plus précisément en Angleterre en 1940, sous le nom d' « Operation Research ». L'État Major allié, qui devait accroître l'efficacité de ses opérations, en confia le travail au physicien Blackett. Il s'agissait de rechercher la meilleure rotation des équipages dans les avions¹, l'implantation optimale des radars, plus tard l'organisation des convois transatlantiques...

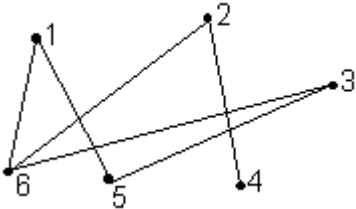
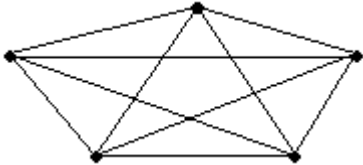
1) Généralités sur les graphes

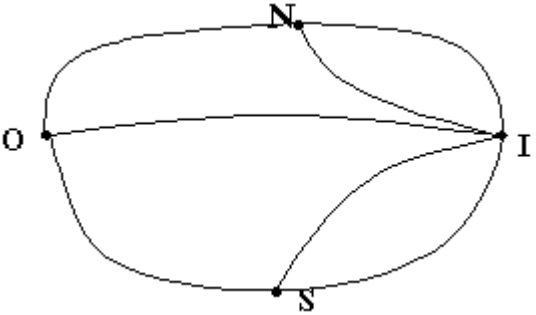
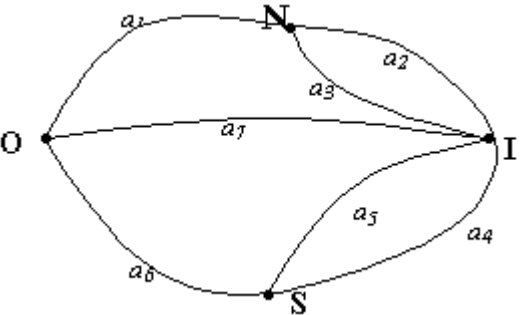
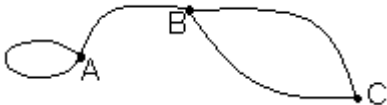
Définition :

Un Graphe est un ensemble de points (appelés **Sommets** du graphe) éventuellement reliés par un ou plusieurs segment(s) appelés **Arêtes**.

Exemples :

Un grand nombre de configurations peut se présenter :

	<p>Graphe à 6 sommets, 5 arêtes Les sommets sont numérotés de 1 à 6</p>
	<p>Tous les sommets sont reliés entre eux par une arête</p>

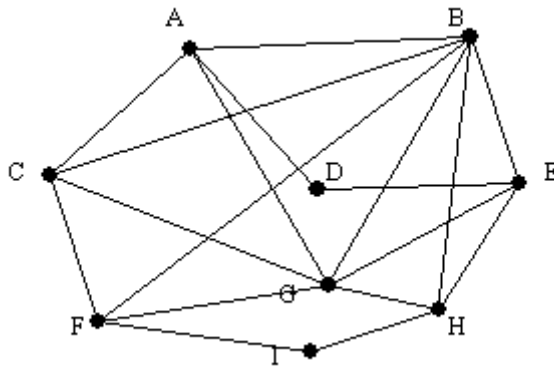
	<p>Plusieurs arêtes peuvent exister entre deux sommets Dans ce cas, il peut être utile de nommer (ou numéroter les arêtes) :</p> 
	<p>Une arête peut avoir ces deux extrémités confondues. On dit alors qu'il s'agit d'une boucle.</p>

Définitions :

L'**ordre** d'un graphe est égal au nombre de ses sommets

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Si deux sommets sont reliés par (au moins) une arête, on dit qu'ils sont **adjacents**.

Exemple :

Pour ce graphe les sommets A,B,C,D,E,F,G,H et I ont respectivement pour degré :

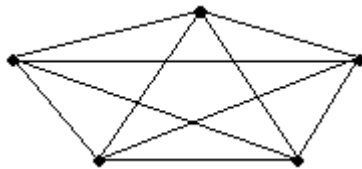
Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré	4	6	4	2	4	4	6	4	2

Définition :

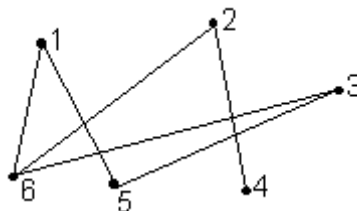
Un graphe dont les sommets sont deux à deux adjacents est appelé **graphe complet**

Exemple :

Ce graphe est complet :



Alors que celui-ci ne l'est pas :



(par exemple, les sommets 1 et 2 ne sont pas adjacents)

Théorème :

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égal au double du nombre de ces arêtes

2) Chaînes et cycles d'un graphe

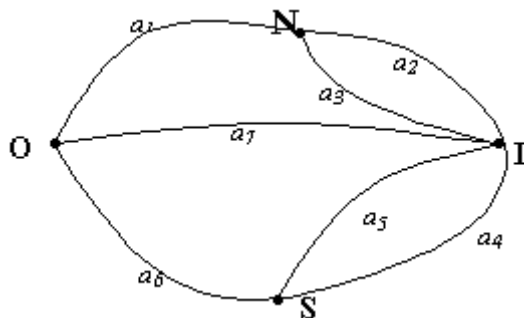
Définition : Soit Γ un graphe. Une **chaîne** de Γ est une **suite alternée de sommets et d'arêtes**

Remarque : Deux sommets pouvant être joints par plusieurs arêtes, il est **nécessaire** mentionner les arêtes dans l'énoncé de la chaîne, afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

Si l'origine et l'extrémité de la chaîne sont confondues, on dit que la chaîne est **fermée**.

Exemple :

Soit Γ le graphe ci-contre :



Une chaîne reliant O à I par exemple $O a_1 N a_3 I$, mais bien sûr $O a_1 N a_2 I$ en est une autre
Enfin $O a_1 N a_2 I a_3 N a_1 O$ est une chaîne fermée

Remarque : Il n'est pas nécessaire que toutes les arêtes soient parcourues, ni qu'elles ne le soient qu'une fois.

Dans les deux chaînes ci-dessus, toutes les arêtes ne sont pas parcourues, et on peut imaginer la chaîne $O a_1 N a_2 I a_7 O a_1 N a_3 I$ qui parcourt donc deux fois l'arête a_1

La notion de chaîne est la notion de chemin «de base»

Définition : Un graphe est dit **connexe** si deux sommets quelconques peuvent toujours être joints par (au moins) une chaîne. Le graphe ci-dessus est bien évidemment connexe, mais pas complet (N et S ne sont pas adjacents)

Propriété : Tout graphe complet est connexe (par définition même).

La réciproque est fausse

Définition :

On appelle **Cycle** toute chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes

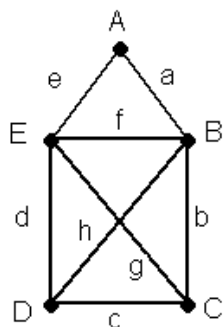
Dans l'exemple ci-dessus, $O a_1 N a_2 I a_7 O$ est un cycle alors que $O a_1 N a_2 I a_3 N a_1$ ne l'était pas (deux fois l'arête a_1)

Encore une fois, il n'est pas imposé que les arêtes soient toutes parcourues

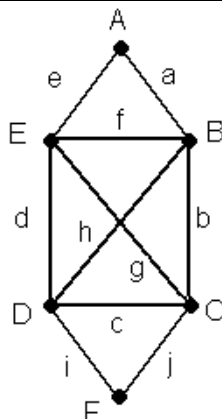
Définitions : On appelle **chaîne eulérienne** toute chaîne empruntant chaque arête du graphe une unique fois.

Si, de plus, cette chaîne est **fermée**, on parle de **cycle eulérien**

Exemples :



La chaîne $(C, c, D, h, B, f, E, g, C, b, B, a, A, e, E, d, D)$ est une chaîne eulérienne entre C et D, puisqu'elle permet de parcourir une seule fois toutes les arêtes du graphe. Il n'existe pas, pour ce graphe, de cycle eulérien.

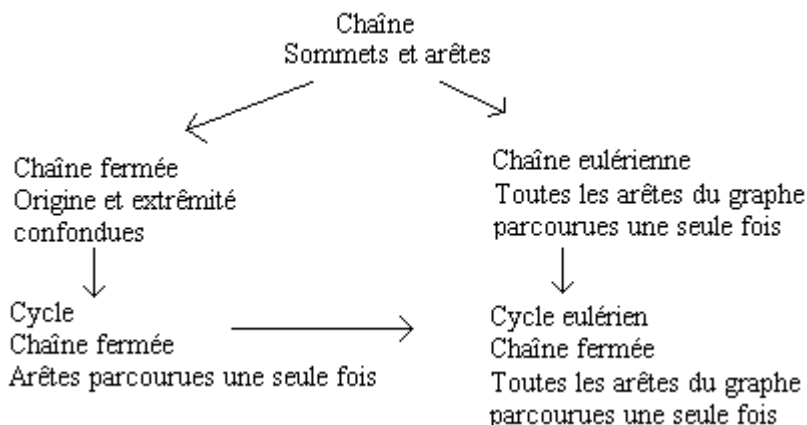


Pour ce graphe (qui n'est autre que celui de gauche auquel on a rajouté un point et deux arêtes), il existe le cycle eulérien $(C, c, D, h, B, f, E, g, C, b, B, a, A, e, E, d, i, F, j, C)$

Remarque :

Pour un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne, il est nécessaire que les arêtes soient distinctes, mais il est possible de repasser plusieurs fois par un même sommet

Pour résumer les différents chemins possibles le long d'un graphe, utilisons cet organigramme

**3) Théorème d'Euler :****Problématique :**

Existe-t-il un critère permettant de savoir si un graphe admet une chaîne ou un cycle eulérien ?

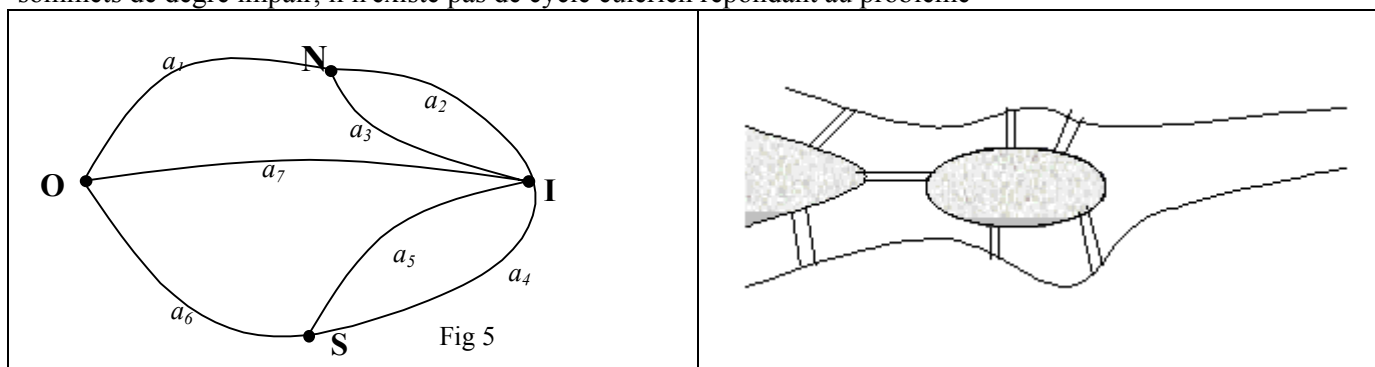
La réponse est positive et réside dans le :

THEOREME

- 1) Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
- 2) Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair **sauf éventuellement deux d'entre eux**. (En d'autres termes le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou à 2.)

Application au problème des ponts de Königsberg :

Le graphe ci-dessous, modélisant la situation géographique des ponts de **Königsberg** (voir introduction), possédant 4 sommets de degré impair, il n'existe pas de cycle eulérien répondant au problème

Remarque :

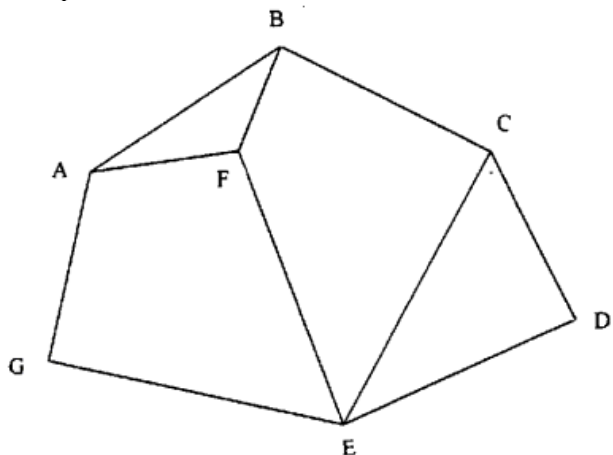
Ce théorème fournit une condition d'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien mais ne fournit pas (hélas!) de procédé de construction !

4) Graphes et matrices

Définition :

Un graphe à n sommets $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ étant donné, on appelle matrice associée à ce graphe la matrice carrée d'ordre n telle que le terme a_{ij} (situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne) est égal au nombre d'arêtes reliant A_i à A_j .

Exemples :

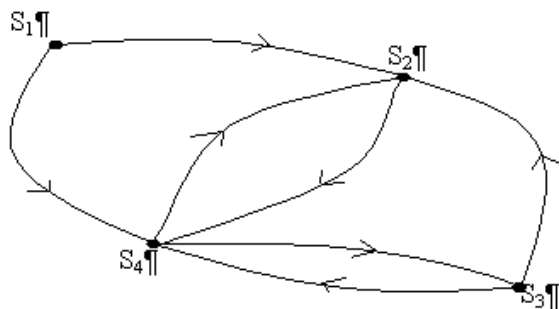


La matrice associée à ce graphe (en classant les sommets par ordre alphabétique) est la matrice carrée 7×7 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques

- Si le graphe ne contient pas de boucles, la diagonale de cette matrice est constituée de 0
- Si le graphe n'est pas orienté, la matrice associée à un graphe est symétrique
- En revanche, si le graphe est orienté comme ci-dessous,



la matrice associée à ce graphe n'est plus symétrique. En effet, cette matrice est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$M =$

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0	1	0	1
S_2	0	0	0	1
S_3	0	1	0	1
S_4	0	1	1	0

Il y a une arête de S_1 vers S_2 mais pas entre S_2 vers S_1 .
Compte tenu de l'orientation des arêtes

Définition :

La longueur d'un chaîne est le nombre d'arêtes composant cette chaîne

Théorème :

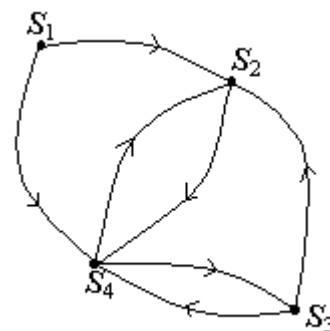
Soit A la matrice associée à un graphe d'ordre m de sommets $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$. Alors le terme a_{ij} (situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne) de A^n est égal au nombre de chaînes **de longueur n** reliant A_i à A_j .

Exemple d'application :

Un parcours de santé est aménagé pour les sportifs dans le parc de la ville. Il est composé de chemins à sens unique, et de quatre points de repère tous distants de 500 mètres, comme indiqué sur le schéma ci-contre.

Sur le schéma du parcours de santé, S_1 désigne l'entrée et S_4 la sortie. On pourra faire l'hypothèse que tout trajet commence en S_1 et se termine en S_4 .

Combien y a-t-il de trajets différents de 1,5 km ?



Le nombre de trajet de 1,5 km entre S_1 et S_4 est égal au nombre de chemins de longueur 3 entre S_1 et S_4 , soit au coefficient $a_{1,4}$ de la matrice M^3 , où M est la matrice associée au graphe ci-dessus

$$\text{Les calculs donnent : } M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ puis } M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y a donc deux chaînes de longueur 3 reliant S_1 à S_4

5) Coloration d'un graphe

Définition :

Colorer un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets, de sorte que 2 sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

On appelle nombre chromatique d'un graphe le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier ce graphe.

Remarque :

Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n est égal à n

En effet, de part sa définition même, tous les sommets de ce graphe sont adjacents les uns aux autres. S'ils sont en nombre égal à n , il faut donc n couleurs exactement pour le colorier

Remarque :

Il n'existe pas de formule donnant le nombre chromatique d'un graphe.

On connaît en général un encadrement de celui-ci et on essaye d'exhiber une coloration (non unique en général) utilisant un nombre minimum de couleurs.

Encadrement du nombre chromatique :

Propriété :

Soit Γ un graphe et Δ le plus grand de tous les degrés des sommets. Alors le nombre chromatique de Γ est inférieur ou égal à $\Delta + 1$

Preuve :

Pour chaque sommet, on peut tenir le raisonnement suivant : Ce sommet est adjacent à Δ sommets au plus, et le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est inférieurs ou égal à Δ (égal à Δ dans le pire des cas ou ces sommets seraient tous adjacents entre eux). Il existe donc dans la palette des $\Delta + 1$ couleurs disponibles, au moins une couleur non utilisée, avec laquelle nous pouvons colorer notre sommet.

Propriété :

Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

En effet, pour colorer un graphe, il faut avoir nécessairement colorer tous ses sous-graphes.

Algorithme de coloration de Welch et Powell (ou algorithme « Glouton ») :

L'algorithme présenté ici permet d'obtenir une coloration d'un graphe en général assez bonne, mais pas nécessairement optimale (chaque situation étant un cas particulier, il peut être légèrement adapté, et certains choix peuvent s'avérer meilleurs que d'autres)

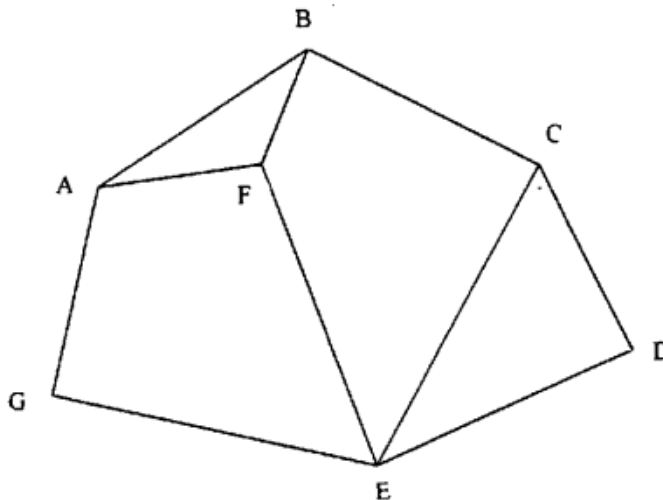
Etape 1 : Classer les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré

Etape 2 : En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur.

Etape 3 : S'il reste des sommets non encore colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2.

Exemple d'application :

Soit à colorier le graphe suivant :



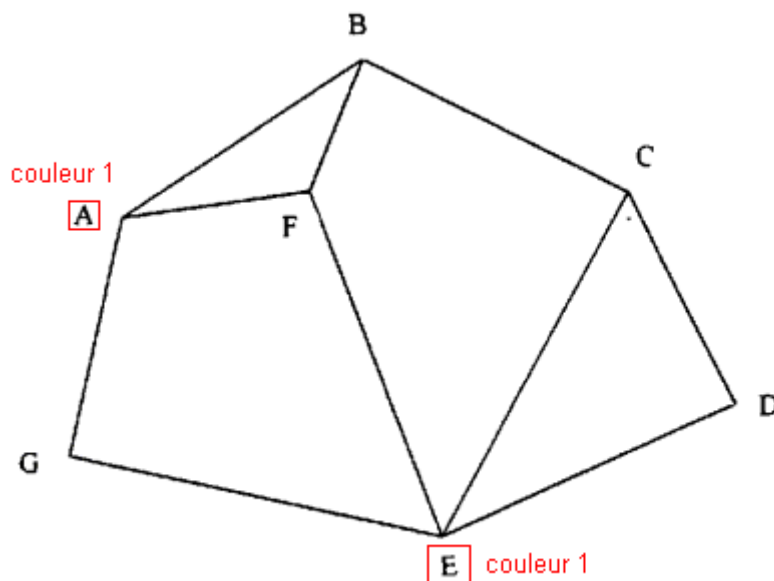
Etape 1 : on classe les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré

Sommet	Degré
E	4
A	3
B	3
C	3
F	3
D	2
G	2

Etape 2 :

On affecte une couleur "1" au sommet E ainsi qu'à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur. En pratique, cela signifie que l'on attribue une couleur à E (couleur n°1) ainsi qu'à tous les sommets non adjacents à E et non adjacents entre eux. Par exemple à A

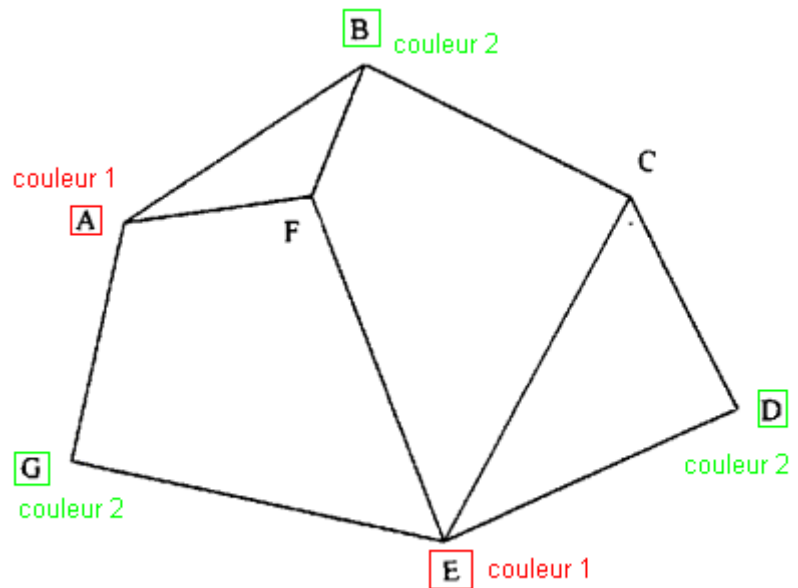
Sommet	Degré	Couleur Attribuée
E	4	1
A	3	1
B	3	
C	3	
F	3	
D	2	
G	2	



Il reste des sommets non colorés, on retourne à l'étape 2

On affecte une couleur "2" au sommet B ainsi qu'à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur. On affecte donc cette couleur à D et G

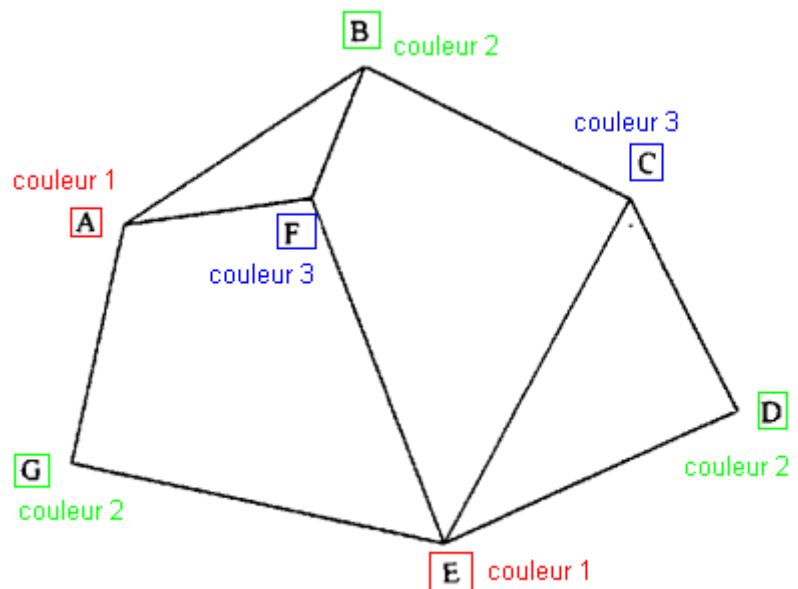
Sommet	Degré	Couleur attribuée
E	4	1
A	3	1
B	3	2
C	3	
F	3	
D	2	2
G	2	2



Il reste des sommets non colorés, on retourne à l'étape 2

On affecte une couleur "3" au sommet C ainsi qu'à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur. On affecte donc cette couleur à F

Sommet	Degré	Couleur attribuée
E	4	1
A	3	1
B	3	2
C	3	3
F	3	3
D	2	2
G	2	2



Les sommets étant tous colorés, l'algorithme s'arrête, et on a ainsi utilisé trois couleurs pour colorier le graphe

6) Graphes pondérés

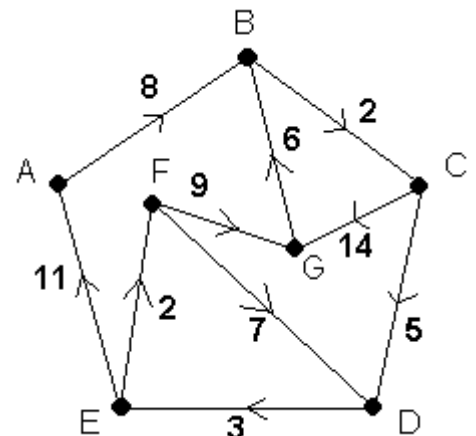
Définitions :

On appelle Graphe pondéré un graphe dont les arêtes sont affectés d'un nombre appelé poids.

On appelle poids d'une chaîne la somme des poids des arêtes qui la composent .

Une plus courte chaîne entre deux sommets est, parmi toutes les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.

Ainsi, pour se rendre de E à B sur le graphe ci-dessous, on peut effectuer le chemin E-A-B, de poids égal à $11+8=19$ ou le chemin E-F-G-B de poids égal à $2+9+6=17$. Il semble donc que la chaîne la plus courte entre E et B soit de poids égal à 17.



Existe-t-il un moyen de déterminer la plus courte chaîne entre deux sommets d'un graphe ?

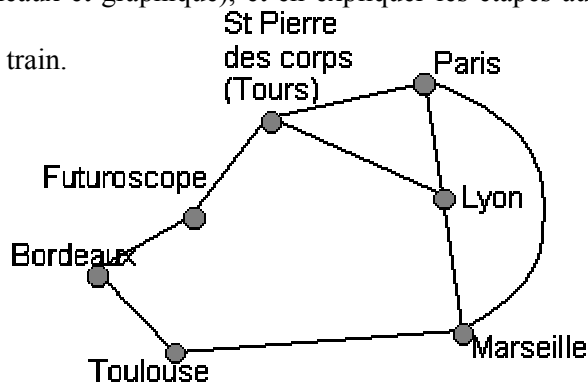
La réponse est positive, sous la forme de : **Algorithme de Dijkstra :**

Cet algorithme est valable lorsque les poids sont tous positifs (ce qui constitue la majorité des cas)

Nous allons illustrer cet algorithme à l'aide d'un exemple (tableaux et graphique), et en expliquer les étapes au fur et à mesure (en bleu)

Un voyageur souhaite se rendre de Marseille au Futuroscope en train.

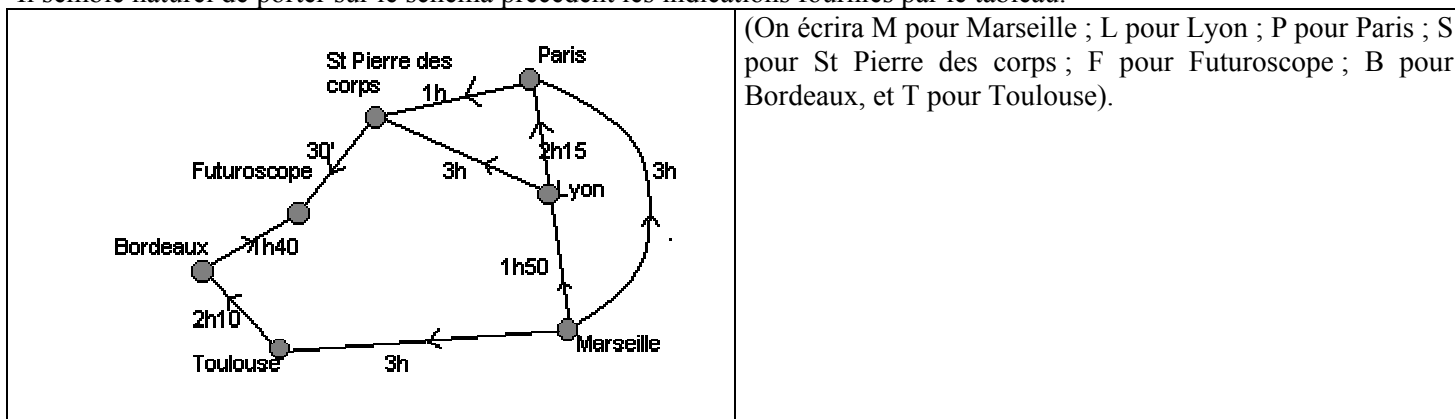
D'une carte du réseau TGV, il a extrait le schéma ci-contre :



Les guides donnent par ailleurs les temps suivants :

Marseille – Lyon : 1h50	Lyon – Paris : 2h15	St Pierre des corps – Futuroscope : 30'
Marseille – Paris : 3h	Lyon – St Pierre des corps : 3h	Futuroscope - Bordeaux : 2h10
Marseille -Toulouse : 3h	Paris – St Pierre des corps : 1h	Toulouse – Bordeaux : 2h10

Il semble naturel de porter sur le schéma précédent les indications fournies par le tableau.



(On écrira M pour Marseille ; L pour Lyon ; P pour Paris ; S pour St Pierre des corps ; F pour Futuroscope ; B pour Bordeaux, et T pour Toulouse).

On appelle Σ l'ensemble dans lequel on met les sommets au fur et à mesure de leur marquage définitif.

Le voyageur, partant de Marseille, peut se rendre « directement » à Paris (3h), à Lyon (1h50), ou à Toulouse (3h). Il code ces indications sur son schéma, en indiquant de plus pour chacune de ces villes l'initiale de la ville de laquelle il vient.

On attribue au sommet M le couple (0,M)

A chaque sommet X on associe le couple : (dist(X), P(X)), dans lequel dist(X) représente la distance (provisoire ou définitive) de M à X, et P(X) le prédécesseur de X.

On attribue aux autres sommets le couple (+∞, ?)

Ces trois villes seront dites « provisoirement marquées ».

On place M dans Σ . Une fois qu'un sommet est placé dans Σ , on noircit le reste de la colonne le concernant

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M-> Σ	(1h50, M)	(3h, M)	(∞; ?)	(∞; ?)	(∞; ?)	(3h, M)	$\Sigma = \{M\}$

Le temps le plus court inscrit à cette étape est 1h50 (si l'on excepte, bien entendu, 0 pour Marseille).

Aucune autre ville n'étant accessible depuis Marseille en un temps plus court, on peut assurer **qu'aucun autre trajet, passant par une autre ville, ne relie Marseille à Lyon en un temps plus court.** 1h50 est le temps minimum d'un trajet Marseille-Lyon.

Ce temps sera appelé **distance de Marseille à Lyon**, et noté **dist(L)**. Lyon sera dite **marquée définitivement**.

Notre voyageur peut alors considérer les villes accessibles depuis Lyon : pour chacune, trois cas peuvent se présenter :

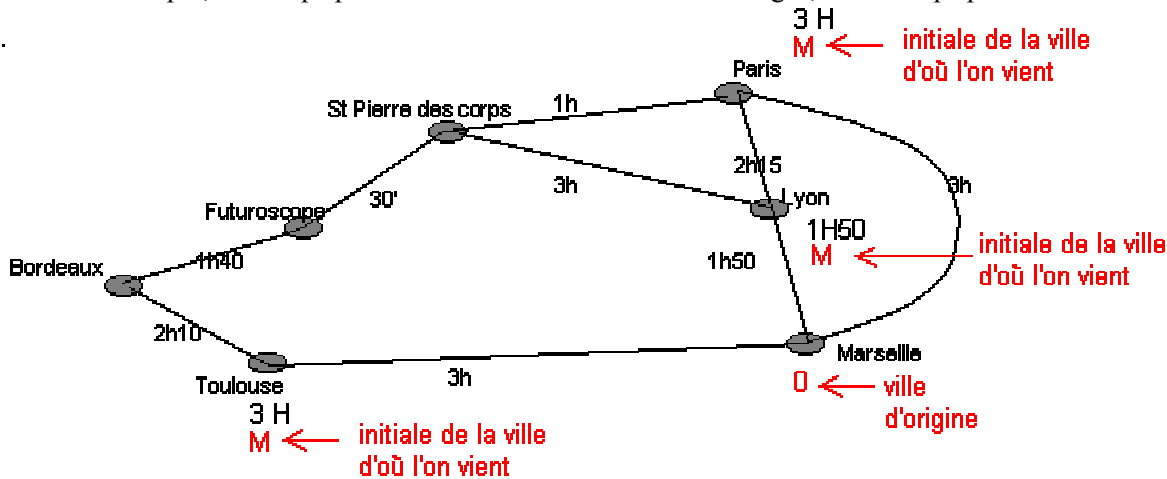
- Cette ville X n'était pas provisoirement marquée : on la marquera provisoirement du temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]).
- Cette ville était déjà provisoirement marquée, mais le temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]) est inférieur au temps du marquage provisoire : on le remplace.
- Cette ville était déjà provisoirement marquée, et le temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]) est supérieur au temps du marquage provisoire : on garde le marquage provisoire.

Autrement dit :

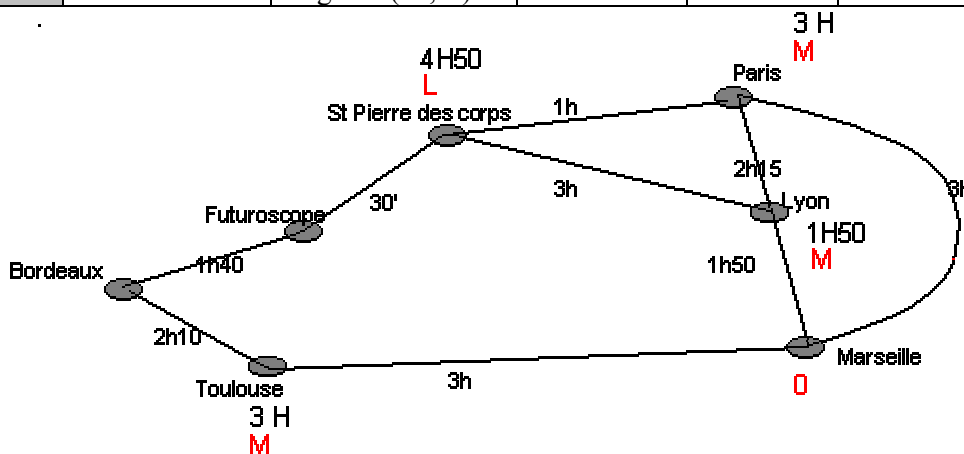
Tant que tous les sommets ne sont pas dans Σ , ou que le sommet F n'est pas affecté de la plus petite distance provisoire :

- Choisir parmi les sommets n'appartenant pas à Σ un de ceux dont la distance provisoire est minimale. Soit X ce sommet.
- Mettre X dans Σ .
- Pour chacun des sommets Y_i qui lui sont adjacents et qui ne sont pas dans Σ
- Calculer $s = \text{distance de X} + \text{pois de l'arête [XY}_i]$
- Si s est inférieur à la distance provisoire de Y_i , attribuer à Y_i le couple (s, X)

Dans notre exemple, les temps pour Paris et Toulouse restent inchangés, et un temps pour Saint Pierre des Corps apparaît.



M	L	P	S	F	B	T	Σ
M- \rightarrow Σ	(1h50,M)	(3h,M)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma = \{M\}$
	L- \rightarrow Σ	(on recopie le temps au dessus) (3h,M) et on compare au temps en provenance de Lyon, c'est à dire $d(L)+[LP]$ $1h50+2h15 = 4h05$ Puisque $4h05 > 3h$, on garde (3h,M)	$d(L)+[LS] = 1h50+3h = 4h50$ (marquage provisoire)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	on recopie le temps au dessus) (3h,M) Il reste inchangé car on ne peut pas raliar Lyon et Toulouse	$\Sigma = \{M, L\}$



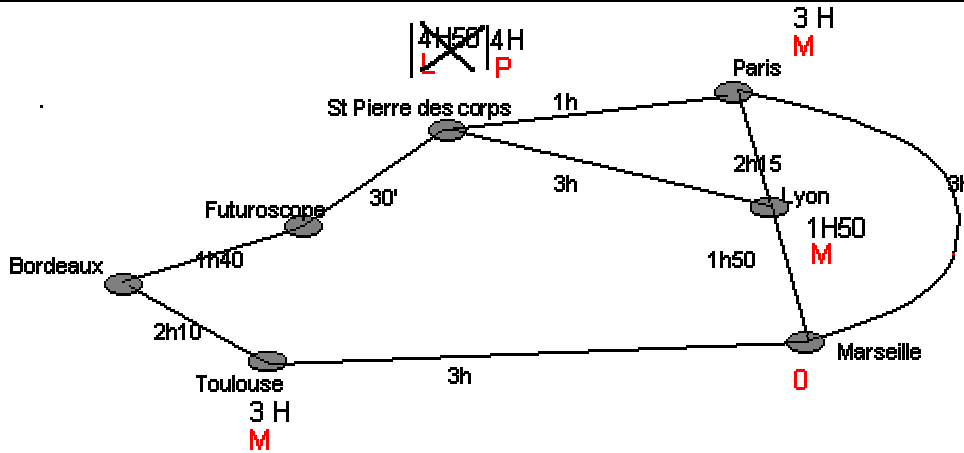
A ce stade, parmi les villes provisoirement marquées, Paris et Toulouse ont les distances minimales (3h).

Paris, par exemple, ne pourra donc pas être reliée à Marseille en moins de 3 heures.

Paris est donc marquée définitivement

Le même raisonnement que précédemment conduit à modifier le temps de St Pierre des Corps, puisque $\text{dist}(P)+\text{pois de l'arête}[PS]=4h$, et que $4h < 4h30$.

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M-> Σ	(1h50,M)	(3h,M)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M\}$
	L-> Σ	(3h,M)	(4h50,L) (marquage provisoire)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M,L\}$
		P-> Σ	Puisque $d(P)+[PS]$ $=3h+1h$ $=4h < 4h50$ on retiendra (4h,P)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M,L,P\}$



Toulouse est marquée définitivement. Apparaît un temps provisoires pour Bordeaux

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M-> Σ	(1h50,M)	(3h,M)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M\}$
	L-> Σ	(3h,M)	(4h50,L)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M,L\}$
		P-> Σ	(4h,P)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M,L,P\}$
			(4h,P)	(∞ ;?)	(5H10,T)	T-> Σ	$\Sigma=\{M,L,P,T\}$

St Pierre des Corps est marquée définitivement. Apparaît un temps provisoires pour Le Futuroscope

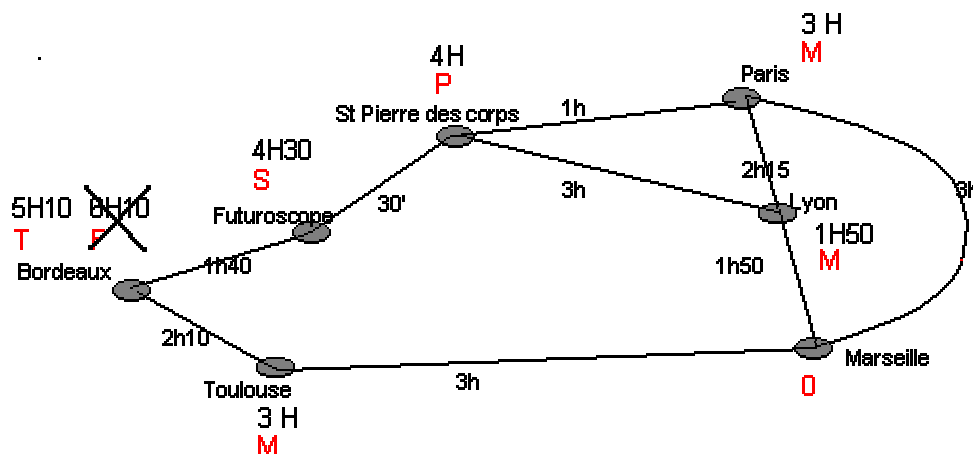
M	L	P	S	F	B	T	Σ
M-> Σ	(1h50,M)	(3h,M)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M\}$
	L-> Σ	(3h,M)	(4h50,L)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M,L\}$
		P-> Σ	(4h,P)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M,L,P\}$
			(4h,P)	(∞ ;?)	(5H10,T)	T-> Σ	$\Sigma=\{M,L,P,T\}$
			S-> Σ	(4h30,S)	(5H10,T)		$\Sigma=\{M,L,P,T,S\}$

Le Futuroscope est marqué définitivement.

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M-> Σ	(1h50,M)	(3h,M)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M\}$
	L-> Σ	(3h,M)	(4h50,L)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M,L\}$
		P-> Σ	(4h,P)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{M,L,P\}$
			(4h,P)	(∞ ;?)	(5H10,T)	T-> Σ	$\Sigma=\{M,L,P,T\}$
			S-> Σ	(4h30,S)	(5H10,T)		$\Sigma=\{M,L,P,T,S\}$
				F-> Σ	(5H10,T)		$\Sigma=\{M,L,P,T,S,F\}$

Le Futuroscope a été marqué (définitivement) avant Bordeaux : le temps pour atteindre Bordeaux étant supérieur à celui mis pour atteindre Poitiers par un autre trajet, il est inutile d'envisager de passer par Bordeaux.

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M-> Σ	(1h50,M)	(3h,M)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{\mathbf{M}\}$
	L-> Σ	(3h,M)	(4h50,L)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{\mathbf{M,L}\}$
		P-> Σ	(4h,P)	(∞ ;?)	(∞ ;?)	(3h,M)	$\Sigma=\{\mathbf{M,L,P}\}$
			(4h,P)	(∞ ;?)	(5H10,T)	T-> Σ	$\Sigma=\{\mathbf{M,L,P,T}\}$
			S-> Σ	(4h30,S)	(5H10,T)		$\Sigma=\{\mathbf{M,L,P,T,S}\}$
				F-> Σ	(5H10,T)		$\Sigma=\{\mathbf{M,L,P,T,S,F}\}$



La longueur du plus court chemin de M à F est la distance de F. La chaîne de poids minimum se lit "à l'envers", de F à chacun des prédécesseurs successifs.

Remarque : ici l'algorithme se termine alors qu'un des sommets n'a pas été marqué définitivement (Bordeaux). Ceci vient du fait que le temps trouvé pour le Futuroscope (extrémité du chemin cherché) est inférieur aux temps encore provisoires restant (Bordeaux : 5h10). On peut alors être certain que le passage par Bordeaux n'est pas intéressant, et que le chemin optimal ne passera pas par cette ville.

La lecture « inverse » des prédécesseurs donne successivement : (4h30,S) ; (4h,P) ; (3h,M) .

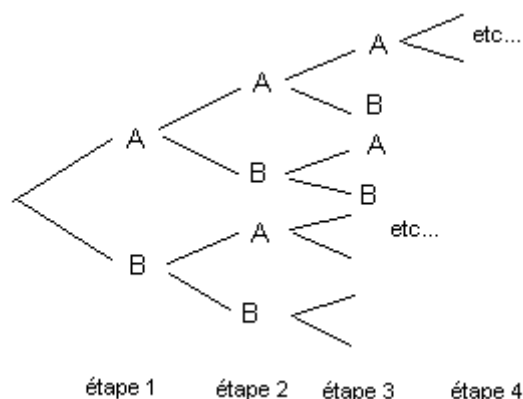
Le chemin optimal est donc Marseille- Paris-Saint-Pierre des Corps- Futuroscope

On démontre que cet algorithme donne un chemin minimal

7) Graphes probabilistes

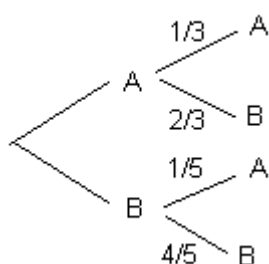
Introduction :

Lorsque l'on répète plusieurs fois une expérience n'ayant que deux issues A et B, indépendantes ou non, on obtient un arbre de probabilités conditionnelles de la forme :

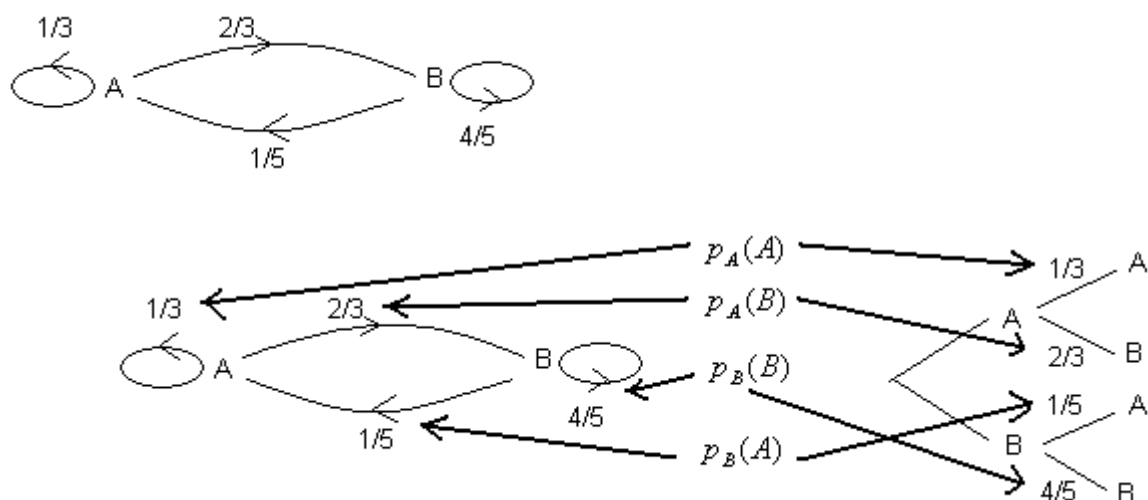


On voit vite les limites d'une telle représentation, dès que les épreuves se répètent plus de 4 fois !

Cependant, l'arbre de probabilité suivant :



peut être vu comme un graphe **orienté** et **pondéré**, de sommets A et B, de la forme :



Remarque :

Sur ce graphe ne figurent que les probabilités conditionnelles d'un événement sachant un autre, et n'apparaissent pas les probabilités « simples » des événements A et B.

Définition :

Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré, tel que les poids figurant sur chaque arête est un nombre réel de l'intervalle $[0;1]$ et tel la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet vaut 1.

On dit que A et B sont les différents **états** du système. Le poids des arête représente la probabilité de passer d'un état à un autre.

Définition :

Si on note $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ les sommets de ce graphe (représentant donc des événements), la matrice carrée $n \times n$ dans laquelle le coefficient a_{ij} (situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne) représente le poids de l'arête orientée $\overrightarrow{A_i A_j}$, donc la probabilité conditionnelle $p_{A_i}(A_j)$ est appelé matrice de transition du graphe probabiliste.

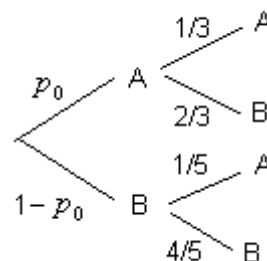
Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, la matrice de transition du système (où on a ordonné les points suivant l'ordre alphabétique) est donc

$$\begin{array}{ccc} p_A(A) & & p_A(B) \\ & \rightarrow & \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{array} \right) & \leftarrow \\ & \leftarrow & \\ p_B(A) & & p_B(B) \end{array}$$

Conséquence :

Supposons qu'une expérience aléatoire d'issues possibles A et B se répète n fois successivement, et que les probabilités de réalisation initiale des événements A et B soient $p_0 = p(A)$ et $q_0 = p(B) = 1 - p(A) = 1 - p_0$. Supposons enfin que les probabilités conditionnelles soient celles définies plus haut. On a donc :



La probabilité de réalisation de l'événement A à la $1^{\text{ème}}$ étape, notée p_1 sera donc égale à :

$$p_1 = \frac{1}{3} \times p_0 + \frac{1}{5} \times (1 - p_0) = \frac{1}{3} \times p_0 + \frac{1}{5} \times q_0. \text{ De la même manière la probabilité de réalisation de l'événement A à la } 1^{\text{ème}} \text{ étape, } q_1 \text{ sera égale à : } q_1 = \frac{2}{3} \times p_0 + \frac{4}{5} \times q_0.$$

En utilisant la notation matricielle, si on note $(p_0 \quad q_0)$ les deux probabilités de l'état initial, et si on note $(p_1 \quad q_1)$ la

probabilité à la $1^{\text{ère}}$ étape, on aura $(p_1 \quad q_1) = (p_0 \quad q_0) \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Si on note P_1, P_2, \dots, P_n les matrices lignes $(p_n \quad q_n)$ correspondant aux probabilités à la $n^{\text{ème}}$ étape, et M la matrice de transition, on aura donc :

$$P_1 = P_0 \times M, \quad P_2 = P_1 \times M, \text{ etc... et de manière générale } P_{n+1} = P_n \times M.$$

On en déduit par récurrence que pour tout entier n , $P_n = P_0 \times M^n$

Théorème :

Soit Γ un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0.

Alors

- l'état P_n converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0
- P est l'unique solution de l'équation matricielle $X = X \times M$

Remarque : X est la matrice inconnue.

La résolution de l'équation matricielle se traduira par celle d'un système.