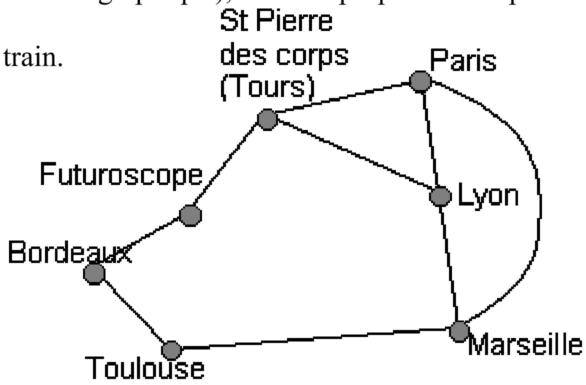
La réponse est positive, sous la forme de : **Algorithme de Dijkstra :**

Cet algorithme est valable lorsque les poids sont tous positifs (ce qui constitue la majorité des cas)

Nous allons illustrer cet algorithme à l'aide d'un exemple (tableaux et graphique), et en expliquer les étapes au fur et à mesure (en bleu)

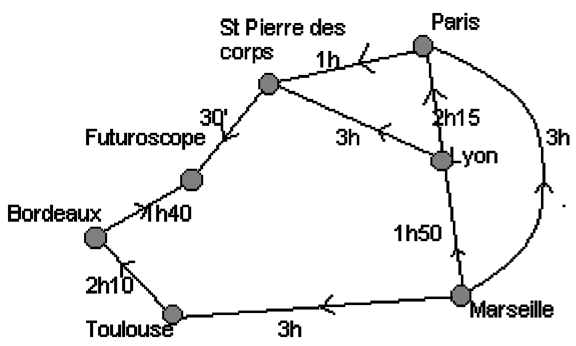
Un voyageur souhaite se rendre de Marseille au Futuroscope en train.
D'une carte du réseau TGV, il a extrait le schéma ci-contre :



Les guides donnent par ailleurs les temps suivants :

Marseille – Lyon : 1h50	Lyon – Paris : 2h15	St Pierre des corps – Futuroscope : 30 '
Marseille – Paris :3h	Lyon – St Pierre des corps : 3h	Futuroscope - Bordeaux : 2h10
Marseille -Toulouse : 3h	Paris – St Pierre des corps : 1h	Toulouse – Bordeaux : 2h10

Il semble naturel de porter sur le schéma précédent les indications fournies par le tableau.



(On écrira M pour Marseille ; L pour Lyon ; P pour Paris ; S pour St Pierre des corps ; F pour Futuroscope ; B pour Bordeaux, et T pour Toulouse).

On appelle Σ l'ensemble dans lequel on met les sommets au fur et à mesure de leur marquage définitif.

Le voyageur, partant de Marseille, peut se rendre « directement » à Paris (3h), à Lyon (1h50), ou à Toulouse (3h). Il code ces indications sur son schéma, en indiquant de plus pour chacune de ces villes l'initiale de la ville de laquelle il vient.

On attribue au sommet M le couple (0,M)

A chaque sommet X on associe le couple : (dist(X), P(X)), dans lequel dist(X) représente la distance (provisoire ou définitive) de M à X, et P(X) le prédécesseur de X.

On attribue aux autres sommets le couple $(+\infty, ?)$

Ces trois villes seront dites « **provisoirement marquées** ».

On place M dans Σ. Une fois qu'un sommet est placé dans Σ, on noircit le reste de la colonne le concernant

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M->Σ	(1h50,M)	(3h,M)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M**}

Le temps le plus court inscrit à cette étape est 1h50 (si l'on excepte, bien entendu, 0 pour Marseille).

Aucune autre ville n'étant accessible depuis Marseille en un temps plus court, on peut assurer **qu'aucun autre trajet, passant par une autre ville, ne relie Marseille à Lyon en un temps plus court.** 1h50 est le temps minimum d'un trajet Marseille-Lyon.

Ce temps sera appelé **distance de Marseille à Lyon**, et noté **dist(L)**. Lyon sera dite **marquée définitivement.**

Notre voyageur peut alors considérer les villes accessibles depuis Lyon : pour chacune, trois cas peuvent se présenter :

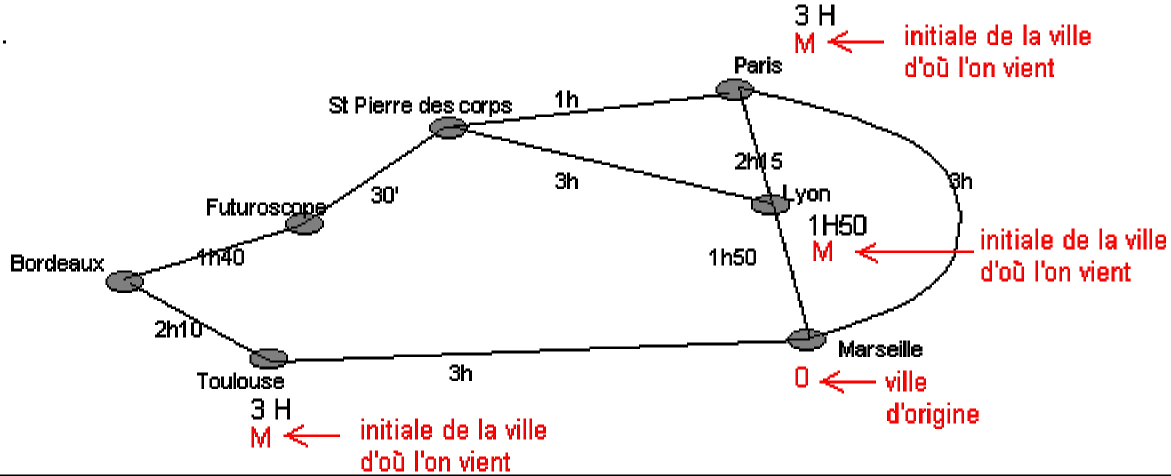
- Cette ville X n'était pas provisoirement marquée : on la marquera provisoirement du temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]).
- Cette ville était déjà provisoirement marquée, mais le temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]) est inférieur au temps du marquage provisoire : on le remplace.
- Cette ville était déjà provisoirement marquée, et le temps (dist(L)+poids de l'arête [LX]) est supérieur au temps du marquage provisoire : on garde le marquage provisoire.

Autrement dit :

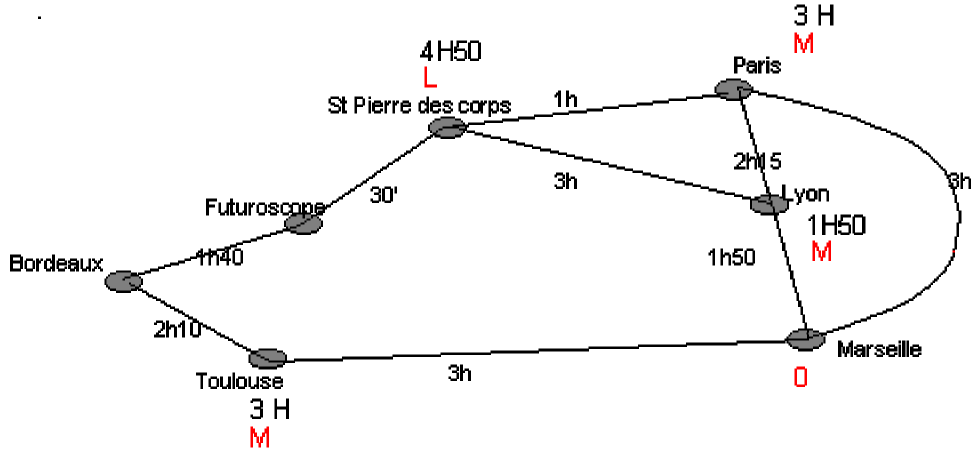
Tant que tous les sommets ne sont pas dans Σ, ou que le sommet F n'est pas affecté de la plus petite distance provisoire :

- Choisir parmi les sommets n'appartenant pas à Σ un de ceux dont la distance provisoire est minimale. Soit X ce sommet.
- Mettre X dans Σ.
- Pour chacun des sommets Y_i qui lui sont adjacents et qui ne sont pas dans Σ
- Calculer s=distance de X + poids de l'arête $[XY_i]$
- Si s est inférieur à la distance provisoire de Y_i, attribuer à Y_i le couple (s, X)

Dans notre exemple, les temps pour Paris et Toulouse restent inchangés, et un temps pour Saint Pierre des Corps apparaît.

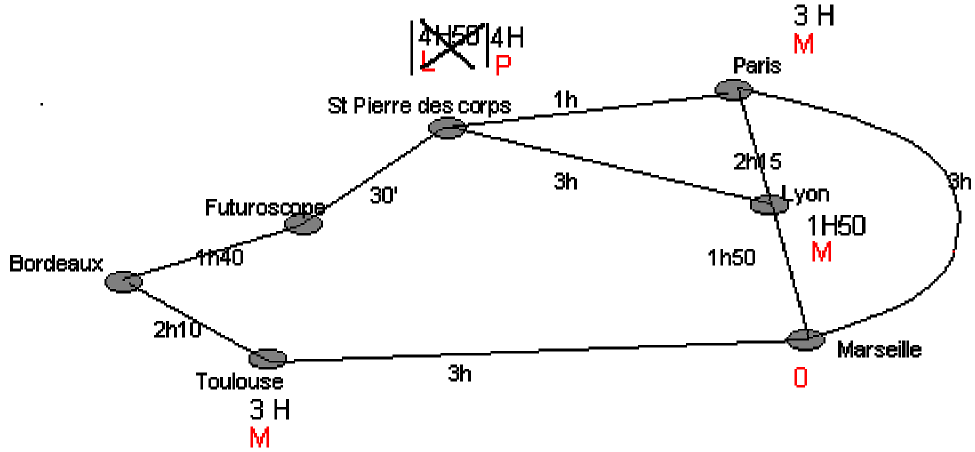


M	L	P	S	F	B	T	Σ
M->Σ	(1h50,M)	(3h,M)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M**}
	L->Σ	(on recopie le temps au dessus) (3h,M) et on compare au temps en provenance de Lyon, c'est à dire d(L)+[LP] 1h50+2h15 = 4h05 Puisque 4h05>3h, on garde (3h,M)	d(L)+[LS] =1h50+3h =4h50 (marquage provisoire)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	on recopie le temps au dessus) (3h,M) Il reste inchangé car on ne peut pas ralier Lyon et Toulouse	Σ={**M,L**}



A ce stade, parmi les villes provisoirement marquées, Paris et Toulouse ont les distances minimales (3h).
Paris, par exemple, ne pourra donc pas être reliée à Marseille en moins de 3 heures.
Paris est donc marquée définitivement
Le même raisonnement que précédemment conduit à modifier le temps de St Pierre des Corps, puisque dist(P)+poids de l'arête[PS]=4h, et que 4h<4h30.

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M->Σ	(1h50,M)	(3h,M)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M**}
	L->Σ	(3h,M)	(4h50,L) (marquage provisoire)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L**}
		P->Σ	Puisque d(P)+[PS] =3h+1h =4h<4h50 on retiendra (4h,P)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L,P**}



Toulouse est marquée définitivement. Apparaît un temps provisoires pour Bordeaux

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M->Σ	(1h50,M)	(3h,M)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M**}
	L->Σ	(3h,M)	(4h50,L)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L**}
		P->Σ	(4h,P)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L,P**}
			(4h,P)	$(\infty;?)$	(5H10,T)	T->Σ	Σ={**M,L,P,T**}

St Pierre des Corps est marquée définitivement. Apparaît un temps provisoires pour Le Futuroscope

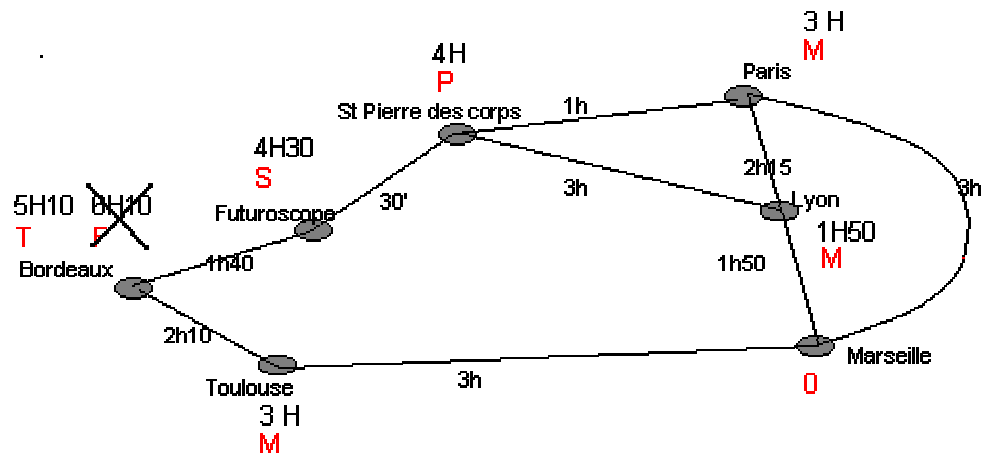
M	L	P	S	F	B	T	Σ
M->Σ	(1h50,M)	(3h,M)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M**}
	L->Σ	(3h,M)	(4h50,L)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L**}
		P->Σ	(4h,P)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L,P**}
			(4h,P)	$(\infty;?)$	(5H10,T)	T->Σ	Σ={**M,L,P,T**}
			S->Σ	(4h30,S)	(5H10,T)		Σ={**M,L,P,T, S**}

Le Futuroscope est marqué définitivement.

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M->Σ	(1h50,M)	(3h,M)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M**}
	L->Σ	(3h,M)	(4h50,L)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L**}
		P->Σ	(4h,P)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L,P**}
			(4h,P)	$(\infty;?)$	(5H10,T)	T->Σ	Σ={**M,L,P,T**}
			S->Σ	(4h30,S)	(5H10,T)		Σ={**M,L,P,T, S**}
				F->Σ	(5H10,T)		Σ={**M,L,P,T, S,F**}

Le Futuroscope a été marqué (définitivement) avant Bordeaux : le temps pour atteindre Bordeaux étant supérieur à celui mis pour atteindre Poitiers par un autre trajet, il est inutile d'envisager de passer par Bordeaux.

M	L	P	S	F	B	T	Σ
M->Σ	(1h50,M)	(3h,M)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M**}
	L->Σ	(3h,M)	(4h50,L)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L**}
		P->Σ	(4h,P)	$(\infty;?)$	$(\infty;?)$	(3h,M)	Σ={**M,L,P**}
			(4h,P)	$(\infty;?)$	(5H10,T)	T->Σ	Σ={**M,L,P,T**}
			S->Σ	(4h30,S)	(5H10,T)		Σ={**M,L,P,T, S**}
				F->Σ	(5H10,T)		Σ={**M,L,P,T, S,F**}



La longueur du plus court chemin de M à F est la distance de F. La chaîne de poids minimum se lit "**à l'envers", de F à chacun des prédécesseurs successifs.**

Remarque : ici l'algorithme se termine alors qu'un des sommets n'a pas été marqué définitivement (Bordeaux). Ceci vient du fait que le temps trouvé pour le Futuroscope (extrémité du chemin cherché) est inférieur aux temps encore provisoires restant (Bordeaux : 5h10). On peut alors être certain que le passage par Bordeaux n'est pas intéressant, et que le chemin optimal ne passera pas par cette ville.

La lecture « inverse » des prédécesseurs donne successivement : (4h30,S) ; (4h,P) ; (3h,M) .

Le chemin optimal est donc Marseille- Paris-Saint-Pierre des Corps- Futuroscope

On démontre que cet algorithme donne un chemin minimal