Formulaire Analyse

❖ Transformée de Fourier

- $F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du\ ,\ \alpha\ \in\ \mathbb{R}$

- $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$

❖ Transformée de Laplace

- $L(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\ ,\ p\ \in\ \mathbb{C}$

- $f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} L(p)e^{px}dp$

❖ Fonction Analytique

Définition : une fonction est analytique (ou holomorphe) dans $\Omega \subset \mathbb{C}$ si pour tout z appartenant à Ω, la dérivée f'(z) éxiste.
En pratique, on utilise les de conditions de Cauchy-Riemman : soient u(x,y) et v(x,y) les parties réelles et imaginaires de f (f(z) = u(x,y) + iv(x,y)) qui possèdent des dérivées partielles premières et continues. Alors f est analytique ssi :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

- <u>Théorème de Cauchy</u>

Soit f une fonction holomorphe sur Ω et un C un contour fermé inclu dans Ω.

- $\oint_C f(z)dz = 0$

- <u>Intégrale de Cauchy</u>

Soit f une fonction holomorphe sur Ω et un C un contour fermé inclu dans Ω. Soit z_0 un point quelconque intérieur à C.

- $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{z-z_0}$

- $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{(n+1)}}.dz$

❖ Zéro et pôle

Soit f une fonction holomorphe sur Ω . On dit que la fonctio analytique f a un zero d'ordre n en $z = z_0$ si :

- $f(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \cdots = \frac{d^{(n-1)}f}{dz^{(n-1)}}(z_0) = 0$

On appelle singularité d'une fonction f tout point z_0 tel que la fonction ne soit pas analytique en z_0 mais qu'elle le soit en tout voisinage de z_0.
Un pôle de f est une singularité telle qu'il existe n assez grand pour que $(z - z_0)^n f(z)$ soit une fonction holomorphe.
Si la fonction inverse $\frac{1}{f}$ a un zéro d'ordre n, alors f a un pôle d'ordre n. (si n = 1, on parle de pôle simple)

Si f est une fonction analytique dans Ω à l'exception de singularités isolées, alors on dit que f est une fonction meromorphe.

❖ Résidu

Soit f(z) une fonction méromorphe dans le domaine Ω alors le résidu de f pour la singularité z_0 d'ordre n est donné par la limite suivante :

- $Res\,\langle\, f(z_0)\,\rangle = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\,[(z - z_0)^n . f(z)]\right\}$

Dans le cas particulier où n = 1 :

- $Res\,\langle\, f(z_0)\,\rangle = \lim_{z\to z_0}\{\,[(z - z_0). f(z)]\}$

❖ Théorème des Résidus

Soit f une fonction meromorphe dans le domaine Ω ayant les points $z_1, z_2 \ldots z_k$ comme pôles à l'intérieur d'une courbe fermée C. Alors l'intégrale sur C de f est égale à :

- $\oint_c\, f(z)dz = 2\pi i\, \sum_{i=1}^{k} Res\langle f(z_i)\rangle$

❖ Lemme de Jordan

On cherche à évaluer I_2 :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Conditions sur f :

a. F(z) est analytique à l'exception de qques pôles au demi-plan supérieur.
b. F(z) décroit uniformément p.r.à l'argument z qd $|z| \to +\infty$.

Etant données ces conditions, on montre le résultat auxiliaire suivant afin de pouvoir appliquer par la suite une déformation appropriée du contour et évaluer l'intégrale I_2.

Lemme de Jordan : Soit Γ_R le demi-cercle du contour $C_R \subset \mathbb{C}$. Soit f(z) vérifiant la condition b) ci-dessus, alors si α > 0, l'intégrale

$$I_R \equiv \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)dz$$

Vérifie

$$\lim_{R\to+\infty} I_R \equiv \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)dz.$$

Remarque :
C'est la parité de alpha qui permet de choisir le bon demi-cercle :
Alpha positif => demi-cercle supérieur
Alpha négatif => demi-cercle inférieur
En effet, on doit assurer la convergence(on pose alpha positif :

$$\to \left|e^{i\alpha z}\right| = \left|e^{i\,Re(\alpha z)} e^{i\,Im(\alpha z)}\right| = e^{-\alpha.R.sin\theta} \to 0 \; ssi \; sin\theta > 0$$

Exemple : $\int_0^{+\infty} \cos(\alpha u).f(u)du \; = \frac{1}{2} Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha u} f(u)du\right)$ avec f est paire.
Voici la marche à suivre :

- Etape 1 : On sépare l'intégrale et choisi le contour appropri é (ci-dessus)

$$I_{C_{RB}} = \oint_{C_R} e^{i\alpha u} f(u)du \; = \int_{-R}^{+R} e^{i\alpha u} f(u)du + \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha u} f(u)du$$

- Etape 2 : Calcul des pôles et des résidus qui sont dans le contour

$$I_{C_{RB}} = \oint_{C_R} e^{i\alpha u} f(u)du = 2\pi i \sum Res\langle e^{i\alpha z_i}.f(z_i)\rangle$$

- Etape 3 : On vérifie les conditions du Lemme de Jordan

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha u} f(u)du = 0$$

- Etape 4 : On faire tendre R vers l'infini et on conclu

❖ Théorème de Bromwich

Soit L(p) une fonction méromorphe dans C et tq $\exists\ M > 0, k > 0\ tq\ \forall p \in C_B^R\ \ on\ a\ |L(p)| < \frac{M}{R^k}$ alors la transformée de Laplace inverse f(t) de L(p) est donnée par :

- $f(t) = \sum_{p_i} Res(L(p)e^{pt})_{p=p_i}$

Où les pôles p_i se trouvent à gauche de la droite $\{\xi_0 - i\infty\,;\, \xi_0 + i\infty\}$.

Voici la procédure à suivre :

- Etape 1 : définition de $I_{C_{RB}}$ et du contour de Bromwich

$$I_{C_{RB}} = \oint_{C_{RB}} e^{pt}L(p)dp = \int_{\xi_0 - i\infty}^{\xi_0 + i\infty} e^{pt}L(p)dp + \int_{\Gamma_R} e^{pt}L(p)dp$$

Remarque : on choisit ξ_0 de telle sorte que tous les pôles soient à gauche de la droite $\{\xi_0 - i\infty\,;\, \xi_0 + i\infty\}$.

- Etape 2 : Calcul des pôles et des résidus

$$\oint_{C_{RB}} e^{pt}L(p)dp = 2\pi i \sum Res\langle f(z_i)\rangle$$

- Etape 3 : Vérification des conditions du théorème de Bromwich

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{pt}L(p)dp = 0$$

- Etape 4 : On applique alors le théorème

$$\int_{\xi_0 - i\infty}^{\xi_0 + i\infty} e^{pt}L(p)dp = 2\pi i \sum Res\langle f(z_i)\rangle$$

$$f(t) = \sum Res\langle f(z_i)\rangle$$