

Formulaire Probabilité

❖ Tribu

Une tribu sur Ω est une famille F de sous-ensembles de Ω telle que :

- Ω et \emptyset sont dans F
- Si $A \in F$ alors $A^c \in F$
- Si $A_n \in F (n \geq 1)$, alors $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in F$ (stabilité par union dénombrable)

❖ Mesure de Probabilité

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable, on appelle mesure de probabilité une fonction $P: \mathcal{A} \rightarrow R^+$ vérifiant :

- $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$.
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ famille dénombrable d'événements mutuellement exclusifs :

$$A_i \in \mathcal{A} \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

$$P\left(\bigcup A_i\right) = \sum P(A_i)$$

❖ Cas discret

- $P(\Omega) = P(\bigcup \{\omega\}) = \sum P(\{\omega\}) = 1$
- $P(\{\omega\}) \geq 0$
- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall A \in \mathcal{A} \text{ et } A \neq \emptyset, P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

❖ Cas continu

Soit P définie par :

$$P[A] = \int_A f(x) dx \text{ pour tout intervalle } A \text{ de } R.$$

Alors P est une mesure de probabilité $\Leftrightarrow f$ est une fonction de densité :

- $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in R$
- f admet au plus un nombre fini de discontinuités sur chaque intervalle fini de R .
- f est intégrable au sens de Lebesgue et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

❖ Analyse combinatoire

1. Arrangements avec répétitions (ordonnée, avec répétition) de p éléments parmi n

$$n^p$$

2. Arrangements sans répétition (ordonnée, pas de répétition) de p éléments parmi n

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

3. Permutations sans répétition de n éléments

$$n!$$

4. Permutations avec répétitions de n éléments divisés en k sous-groupe distinct d'éléments identiques

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

5. Combinaisons sans répétition (pas ordonnée, pas de répétition) de p éléments parmi n

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

6. Combinaisons avec répétitions (pas ordonnée, avec répétition) de p éléments parmi n distincts (pb des cloisons)

$$C_{n+p-1}^p = \frac{A_{n+p-1}^p}{p!} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

❖ Probabilité conditionnelle et indépendance

- Conditionnelle

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

- Théorème

Soit B_i une partition de Ω avec $B_i \in \mathcal{A}$ et $P(B_i) > 0$, alors :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad P[A] = \sum_{i \in \mathcal{N}} P[A|B_i] \cdot P[B_i]$$

- Formule de Bayes (même hypothèses que ci-dessus)

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad P[B_j|A] = \frac{P[A|B_j] \cdot P[B_j]}{\sum_{i \in \mathcal{N}} P[A|B_i] \cdot P[B_i]} = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]}$$

- Indépendance

Deux évènements sont indpts $\Leftrightarrow P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$

❖ Variable aléatoire

1. Définition

Une application $X : \Omega \rightarrow R$ est une variable aléatoire ssi :

$$\forall x \in R, \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

2. Loi de probabilité de X

Si X est une variable aléatoire, alors on définit $P_X[A] = P[\{\omega : X(\omega) \in A\}]$

3. Fonction de répartition

$$F_X(x) = P_X[] - \infty; x] = P[\{X \leq x\}]$$

4. Fonction de masse

$$p_X(x) = P_X[\{x\}] = P[\{X = x\}]$$

5. Support d'une v.a. discrète

$$D_x = \{x : p_X(x) > 0\}$$

$$\sum_{x \in D_x} p_X(x) = 1$$

6. Support d'une v.a. continue

$C_x = \{x : f_X(x) > 0\}$, avec f_X la fct de densité

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

$$F'_X(x) = f_X(x)$$

❖ Espérance

1. Cas Discret

$$E[X] = \sum_{x \in D_x} x \cdot p_X(x)$$

2. Cas Continu

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx, \text{ avec } f_X \text{ la fct de densité}$$

3. $k^{\text{ième}}$ Moment d'une v.a. continue

→ P.r.à l'origine

$$\mu'_k = E[X^k]$$

→ P.r.à la moyenne

$$\mu_k = E[(X - \mu_X)^k]$$

4. Variance et écart-type

→ Variance

$$\sigma_X^2 = \mu_2$$

→ Ecart-type

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

5. Qques ptés

Soit $Y = aX + b$

$$E[Y] = a \cdot E[X] + b$$

$$\sigma_Y^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2$$

❖ Fonction génératrice et Fonction caractéristique

1. Fonction génératrice des moments M_X

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} \cdot f_X(x) dx, \text{ avec } f_X \text{ la fct de densité}$$

Et on a que :

$$\mu'_k = E[X^k] = M_X^{(k)}(0)$$

2. Fonction caractéristique ϕ_X

$$\phi_X = E[e^{i\omega X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \cdot f_X(x) dx, \text{ avec } f_X \text{ la fct de densité}$$

❖ Lois de probabilités à connaître

A. Les lois discrètes

○ Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli de paramètre p	
Notation	$X : B(p)$
Support	$D_x = \{0; 1\}$
Fonction de masse	$p_x = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{pour tout } x \in D_x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Espérance	p
Variance	P(1-P)
-	-
-	-

○ Loi Binomiale

Loi binomiale de paramètre n et p	
Notation	$X : B(n,p)$
Support	$D_x = \{0; 1 \dots ; n\}$
Fonction de masse	$p_x = \begin{cases} C_n^x p^x(1-p)^{n-x} & \text{pour tout } x \in D_x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Espérance	np
Variance	np(1-p)
-	-
-	-

○ Loi de Poisson

Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$	
Notation	$X : P[\lambda]$
Support	$D_x = \{0; 1 \dots ; n\}$
Fonction de masse	$p_x = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{pour tout } x \in D_x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Espérance	λ
Variance	λ
-	-
-	-

B. Les lois continues

○ Loi uniforme

Loi uniforme sur [a,b]	
Notation	$X : \mathcal{U}([a; b])$
Support	$C_x = [a; b]$
Fonction de densité	$f_X = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in C_x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Fonction de répartition	$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$
Fonction génératrice	$M_X(t) = E[e^{xt}] = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & \text{si } x \in C_x \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$
Fonction caractéristique	$\phi_X = E[e^{i\omega X}] = \frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega(b-a)}$
-	-

○ Loi Normale

Loi normale de paramètre μ et σ^2	
Notation	$X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Support	$C_x = \mathbb{R}$
Fonction de densité	$f_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Fonction de répartition	$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$
Fonction génératrice	$M_X(t) = E[e^{xt}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Espérance	μ
Variance	σ^2

Remarque :

Si

$$\mu = 0 \text{ et } \sigma^2 = 1$$

Alors on parle de v.a. centrée réduite.

○ Loi Exponentielle

Loi exponentielle de paramètre θ et ν	
Notation	$X : Exp(\theta, \nu)$
Support	$C_x =]\nu; +\infty[$
Fonction de densité	$f_x = \begin{cases} \theta e^{-\theta(x-\nu)} & \text{si } x \in C_x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
Fonction de répartition	$F_x =$
Fonction génératrice	$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \frac{\theta e^{t\nu}}{\theta - t}$
Espérance	$\nu + \frac{1}{\theta}$
Variance	$\frac{1}{\theta^2}$