Transformée de Laplace

I. Def : Soit f la fonction de la variable réelle t, définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour t négatif

On appelle transformée de Laplace d'une fonction f, la fonction F définie par $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ où p est une variable complexe. (f est appelée une fonction causale)

Vocabulaire : F est l'image de f par la transformée de Laplace.
f est l'image réciproque de F par la transformée de Laplace, ou l'original de F.

Notation : $F(p)=\mathcal{L}\big[f(t)\big]$ et $f=\mathcal{L}^{-1}\big[F(p)\big]$

Remarque :

La transformée de Laplace d'une fonction n'existe que si l'intégrale généralisée la définissant est convergente.
Pour cela on impose sur f 2 conditions :

1. f doit être continue par morceaux sur tout intervalle fermé $[0,t_0]$
2. f doit être « d'ordre exponentiel à l'infini », c'est à dire $\exists\, M>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tq $\big|f(t)\big|\leqslant M\,e^{\alpha t}$ pour tout $t>T$ où T est assez grand.

On montre que si les hypothèses précédentes sont vérifiées, la transformée de Laplace est définie si $\Re(p)>\alpha$ ce qui implique que le domaine de convergence est le demi-plan complexe $\Re(p)>\alpha$.
Par la suite on considère en général que $\Re(p)>0$.

II. Transformée de Laplace de fonctions élémentaires

II.1. Fonction échelon unité (fonction d'Heaviside)

$$U(t)=\begin{cases}1 \text{ si } t\geqslant 0\\ 0 \text{ si } t<0\end{cases} \qquad F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,U(t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt=\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{p}\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\big[U(t)\big]=\frac{1}{p}}$$

II.2. Fonction impulsion unité (Distribution de Dirac)

$$\text{Soit } \delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} \text{ si } 0\leqslant t\leqslant\varepsilon\\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\delta(t)\,dt=\int_0^{\varepsilon} e^{-pt}\,\frac{1}{\varepsilon}\,dt=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} e^{-pt}\,dt=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\varepsilon}=\frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\,\varepsilon}$$

$\mathcal{L}\big[\delta(t)\big]=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon} e^{-pt}\,\frac{1}{\varepsilon}\,dt=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\,\varepsilon}=1$ car quand $\varepsilon\to 0$, $e^{-p\varepsilon}=1-p\,\varepsilon+o(\varepsilon)$

II.3. Fonction puissance

Soit la fonction $t^n\,U(t)$. $\qquad F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,t^n\,dt\equiv I_n$.

$I_n=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-pt}}{-p}\right)'t^n=\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\,t^n\right]_0^{+\infty}+\frac{n}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,t^{n-1}\,dt\Rightarrow I_n=\frac{n}{p}\,I_{n-1}$

Or $I_0=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,1\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,U(t)\,dt=\frac{1}{p}$; $I_1=\frac{1}{p}\frac{1}{p}$; $I_2=\frac{2}{p}\frac{1}{p^2}$; ... ; $I_n=\frac{n!}{p^{n+1}}$

D'où $\mathcal{L}\big[t^n\,U(t)\big]=\frac{n!}{p^{n+1}}$

II.4. Fonction exponentielle

$f(t)=e^{-at}\,U(t) \qquad F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,e^{-at}\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t}\,dt=\left[-\frac{e^{-(a+p)\,t}}{a+p}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{a+p}$ avec $\Re(p)>\Re(a)$.

$\mathcal{L}\big[e^{-at}\,U(t)\big]=\frac{1}{p+a}$

III. Propriétés de la transformée de Laplace

III.1. Linéarité

$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ on a $\mathcal{L}[\alpha\,f+\beta\,g]=\alpha\,\mathcal{L}[f]+\beta\,\mathcal{L}[g]$

Exemple important : Transformée de Laplace de $\cos(\omega t)\,U(t)$ et $\sin(\omega t)\,U(t)$

$$\mathcal{L}\big[\cos(\omega t)\,U(t)\big]=\mathcal{L}\Big[\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\,U(t)\Big]=\frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}\big[e^{i\omega t}\,U(t)\big]+\mathcal{L}\big[e^{-i\omega t}\,U(t)\big]\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{p+i\omega+p-i\omega}{(p+i\omega)\,(p-i\omega)}=\frac{p}{p^2+w^2}\Rightarrow\boxed{\mathcal{L}\big[\cos(\omega t)\,U(t)\big]=\frac{p}{p^2+\omega^2}}$$

De même on a $\boxed{\mathcal{L}\big[\sin(\omega t)\,U(t)\big]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$

III.2. Règle de similitude (changement d'échelle)

Soit $g(t)=f(a\,t)$ avec $a>0$ $\qquad \mathcal{L}[\,g(t)]=\mathcal{L}[\,f(a\,t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,f(a\,t)\,dt$; on pose $t'=a\,t\Rightarrow dt=\frac{1}{a}\,dt'$

$$\Rightarrow\mathcal{L}[\,g(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{p}{a}t'}\,f(t')\,\frac{dt'}{a}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{p}{a}t'}\,f(t')\,dt'=\frac{1}{a}\,F\big(\tfrac{p}{a}\big)$$ où $F(p)=\mathcal{L}[\,f(t)]$ donc $\boxed{\mathcal{L}[\,f(a\,t)]=\frac{1}{a}\,F\big(\frac{p}{a}\big)}$

III.3. Règle de translation en p

Soit $g(t)=e^{-at}\,f(t)$ d'où $\mathcal{L}[\,g(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,e^{-at}\,f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-(a+p)t}\,f(t)\,dt=F(a+p)$ avec $F(p)=\mathcal{L}[\,f(t)]$

$\boxed{\mathcal{L}[e^{-at}\,f(t)]=F(p+a)}$

III.4. Règle de translation en t (théorème du retard)

Soit $g(t)=f(t-t_0)\,U(t-t_0)$ d'où $\mathcal{L}[\,g(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,f(t-t_0)\,U(t)\,dt=\underbrace{\int_0^{t_0}\ldots}_{=0\text{ avec }U}+\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,f(t-t_0)\,dt$

$$\Rightarrow\mathcal{L}[\,g(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-p(t'+t_0)}\,f(t')\,dt'=e^{-pt_0}\int_0^{+\infty}e^{-pt'}\,f(t')=e^{-pt_0}\,F(p)\Rightarrow\boxed{\mathcal{L}[\,f(t-t_0)\,U(t-t_0)]=e^{-pt_0}\,F(p)}$$

Exemple : Soit $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ où $f_1(t)=U(t)$ et $f_2(t)=U(t-t_0)$

$$\mathcal{L}[\,f(t)]=\mathcal{L}[\,U(t)]+\mathcal{L}[\,U(t-t_0)]=\frac{1}{p}+e^{-pt_0}\,\frac{1}{p}$$

III.5. Transformée d'une fonction périodique

Soit f une fonction périodique de période T, on suppose que f est causale.
On considère la suite de fonctions définie par : $f_n(t)=\begin{cases}f(t)\text{ si }t\in[n\,T,(n+1)\,T]\\ 0\text{ sinon}\end{cases}$

Remarques :

1. Si $n\,T\leqslant t\leqslant(n+1)\,T$ alors $0\leqslant t-n\,T\leqslant T\ \Rightarrow f_n(t)=f_0(t-n\,T)$
2. $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)$

D'où $\mathcal{L}[\,f(t)]=\mathcal{L}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\Big]=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathcal{L}[\,f_n(t)]=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathcal{L}[\,f_0(t-n\,T)]=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-pnT}\,\mathcal{L}[\,f_0(t)]=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-pnT}\,F_0(p)=F_0(p)\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-pnT}=F_0(p)\,\frac{1}{1-e^{-pT}}$

D'où $\boxed{\mathcal{L}[\,f(t)]=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}}$

III.6. Transformée de la dérivée

Théorème : Si f' est continue par morceaux sur tout fermé $[0,t_0]$ et si $\mathcal{L}[\,f(t)]=F(p)$ alors $\mathcal{L}[\,f'(t)]=p\,F(p)-f(0^+)$

Démo : $\mathcal{L}[\,f'(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,f'(t)\,dt=\big[e^{-pt}\,f(t)\big]_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,f(t)\,dt=-f(0^+)+p\,F(p)$

Théorème : Généralisation

1. Si f'' est continue par morceaux sur tout fermé $[0,t_0]$, alors $\mathcal{L}[\,f''(t)]=p^2\,F(p)-p\,f(0^+)-f'(0^+)$
2. Si $f^{(n)}$ l'est aussi, alors $\mathcal{L}\big[\,f^{(n)}(t)\big]=p^n\,F(p)-p^{n-1}\,f(0^+)-p^{n-2}\,f'(0^+)-\cdots-f^{(n-1)}(0^+)$

Démo : 1. $\mathcal{L}[\,f''(t)]=\mathcal{L}\Big[\big(f'(t)\big)'\Big]=p\,\mathcal{L}\,[\,f'(t)]-f'(0^+)=p^2\,F(p)-p\,f(0^+)-f'(0^+)$ 2. Par récurrence

III.7. Transformée de la primitive

Théorème : Si $\mathcal{L}[\,f(t)]=F(p)$ alors $\mathcal{L}\Big[\int_0^t f(x)\,dx\Big]=\frac{F(p)}{p}$

Démo :

Soit $\varphi(t)=\int_0^t f(x)\,dx\Rightarrow\varphi'(t)=f(t)$; $\varphi(0^+)=0$
En applicant le théorème de la transformée de la dérivée on obtient :
$\mathcal{L}[\,\varphi'(t)]=p\,\mathcal{L}[\,\varphi(t)]-\varphi(0^+)\Leftrightarrow\mathcal{L}[\,f(t)]=p\,\mathcal{L}[\int_0^x f(t)\,dt]\Rightarrow\mathcal{L}[\int_0^x f(t)\,dt]=\frac{1}{p}\,\mathcal{L}[\,f(t)]=\frac{F(p)}{p}$

IV. Transformée de Laplace inverse

IV.1. Def : Soit $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$.

On appelle transformée de Laplace inverse ou original de $F(p)$ la fonction $f(t)$ et on note $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$

IV.2. Propriétés

$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{C}\quad \mathcal{L}^{-1}[\lambda F(p)+\mu G(p)]=\lambda\mathcal{L}^{-1}[F(p)]+\mu\mathcal{L}^{-1}[G(p)]$

IV.3. Exemples

1. On sait que $\mathcal{L}[t\,U(t)]=\frac{1}{p^2}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=t\,U(t)$
2. On sait que $\mathcal{L}[U(t-a)]=\frac{e^{-ap}}{p}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ap}}{p}\right]=U(t-a)$
3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+4}\right]=\cos(2\,t)\,U(t)$

IV.4. Original de $F(a\,p)$; $a>0$

Soit $f(t)$ l'original de $F(p)$ c'est à dire $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(p)]\Leftrightarrow F(p)=\mathcal{L}[f(t)]$.
Or $F(a\,p)=\int_0^{+\infty}e^{-apt}f(t)\,dt$ on pose $t'=a\,t\Rightarrow dt'=a\,dt$
$\Rightarrow F(a\,p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt'}f\left(\frac{t'}{a}\right)\frac{dt'}{a}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-pt'}f\left(\frac{t'}{a}\right)dt'=\frac{1}{a}\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$ d'où $\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(a\,p)]=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)}$

IV.5. Original de $F(p+a)$

Soit $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$.
D'où $F(a+p)=\int_0^{+\infty}e^{-(p+a)t}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}d^{-pt}(e^{-at}f(t))\,dt=\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]\Rightarrow\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(a+p)]=e^{-at}f(t)}$

IV.6. Original de $F'(p)$

1. Soit $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(p)]\Leftrightarrow F(p)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)\,dt$
   Or $F'(p)=\frac{\partial}{\partial p}(F(p))=\frac{\partial}{\partial p}\left(\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)\,dt\right)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}(e^{-pt}f(t))\,dt=\int_0^{+\infty}-t\,e^{-pt}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}(-t\,f(t))\,dt=\mathcal{L}[-t\,f(t)]$ D'où $\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F'(t)]=-t\,f(t)}$
2. Généralisation : On sait que $\mathcal{L}^{-1}[F'(t)]=-t\,f(t)=-t\,\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$.
   $\mathcal{L}^{-1}[F''(t)]=\mathcal{L}^{-1}\left[(F'(p))'\right]=-t\,\mathcal{L}^{-1}[F'(p)]=-t\,(-t\,f(t))=(-1)^2t^2f(t)\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}[F''(p)]=(-1)^2t^2f(t)$
   Par récurrence on montre que $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(p)\right]=(-1)^n t^n f(t)}$

Exemples : Trouver les originaux de $a)\ \frac{1}{(p+3)^2}$; $b)\ \frac{2\,p\,a}{(p^2+a^2)^2}$; $c)\ -\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}$

a) 1ère méthode : $\frac{1}{(p+3)^2}=F(3+p)$ o* $F(p)=\frac{1}{p^2}$
   Or $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=t$ d'où $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}[F(3+p)]=t\,e^{-3t}$
   2èmeméthode : $\frac{1}{(p+3)^2}=-\left(\frac{1}{p+3}\right)'$. $\quad\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)^2}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{p+3}\right)'\right]=-(-t\,e^{-3t})=t\,e^{-3t}$

b) $\frac{2\,p\,a}{(p^2+a^2)^2}=-a\left(\frac{1}{p^2+a^2}\right)'=-\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)'$. $\quad\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2\,p\,a}{(p^2+a^2)^2}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)'\right]=-(-t\sin(a\,t))=t\sin(a\,t)$

c) $-\frac{a^2-p^2}{(a^2+p^2)^2}=-\left(\frac{p}{a^2+p^2}\right)'$. $\quad\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)'\right]=-(-t\cos(a\,t))=t\cos(a\,t)$

IV.7. Original de $\int_p^{+\infty}F(u)\,du$

$\int_p^{+\infty}F(u)\,du=\int_p^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-ut}f(t)\,dt\right)=\int_0^{+\infty}\left(\int_p^{+\infty}e^{-ut}du\right)f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-ut}}{-t}\right]_p^{+\infty}f(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt=\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]\quad\Rightarrow\quad\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\int_p^{+\infty}F(u)\,du\right]=\frac{f(t)}{t}}$ avec $F(u)=\mathcal{L}[f(t)]$

Exemple : Calculer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$

Posons $f(t)=e^{-at}-e^{-bt} \Rightarrow F(p)=\mathcal{L}\big[f(t)\big]=\mathcal{L}\big[e^{-at}\big]-\mathcal{L}\big[e^{-bt}\big]=\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}$.

On sait que $\mathcal{L}^{-1}\Big[\int_p^{+\infty} F(u)\,du\Big]=\frac{f(t)}{t} \Rightarrow \mathcal{L}\Big[\frac{f(t)}{t}\Big]=\int_p^{+\infty} F(u)\,du$.

D'où $\mathcal{L}\Big[\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\Big]=\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{u+a}-\frac{1}{u+b}\right)du=\big[\ln(u+a)-\ln(u+b)\big]_p^{+\infty}=-\ln\frac{p+a}{p+b}=\ln\frac{p+b}{p+a}$

IV.8. Original de $F(p)\times G(p)$

IV.8.a. Produit de convolution

Def : étant donné deux fonctions f et g continues sur $[0,+\infty[$

On appelle produit de convolution de f par g noté $f*g$ la fonction $t\mapsto f*g(t)=\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx$

Propriétés :

1. $f*g=g*f$
2. $(f_1+f_2)*g=f_1*g+f_2*g$
3. $\lambda f*g=\lambda(f*g)$

Démo

1. $(f*g)(t)=\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx$. On pose $u=t-x\Rightarrow du=-dx$
   $=\int_t^0 f(t-u)\,g(u)\,(-du)=\int_0^t g(u)\,f(t-u)=g*f(t)$
3. $(\lambda f*g)(t)=\int_0^t \lambda f(x)\,g(t-x)\,dx=\lambda\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx=\lambda\big(f*g(t)\big)$

IV.8.b. Original de $F(p)\times G(p)$

On pose $F(p)=\mathcal{L}\big[f(t)\big]=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$. $G(p)=\mathcal{L}\big[g(x)\big]=\int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\,dx$.

On a $F(p)\times G(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,f(t)\,G(p)\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)\,\big(G(p)\,e^{-pt}\big)\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathcal{L}\big[g(x\ t)\,U(x-t)\big]\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)\Big(\int_0^{+\infty} e^{-px}g(x-t)\,U(x-t)\,dx\Big)dt=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\Big(\int_0^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,U(x-t)\,dt\Big)dx$.

Comme $U(x-t)=0$ donc $x-t<0\Rightarrow x\leqslant t$ $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} e^{-px}\big(\int_0^x f(t)\,g(t-x)\,dt\big)\,dx=\mathcal{L}\big[\int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt\big]=\mathcal{L}\big[f*g\,(x)\big]$ Par conséquent $\boxed{\mathcal{L}[f*g]=F(p)\,G(p)}$

V. Application de la transformée de Laplace

V.1. Méthode

La principale application de la transformée de Laplace consiste à la formation d'une méthode très pratique pour la résolution d'équations différentielles (ou intégrales) et de systèmes différentiels.

Les étapes de cette méthode sont les suivantes :

1. Application de l'opérateur de Laplace $\mathcal{L}$ aux deux membres de l'équation (ou des équations d'un système) en tenant compte des conditions initiales.
2. Résoudre l'équation ou le système algébrique obtenu en 1.
3. Application de la transformée inverse $\mathcal{L}^{-1}$ et détermination de l'original de 2. ce qui permet d'obtenir la solution du problème initial.

V.2. Exemples

1. Trouver la solution de l'équation différentielle (E) $y''-2\,y'+y=x\,e^x$ vérifiant les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
   a. $\mathcal{L}[y'']-2\,\mathcal{L}[y']+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[x\,e^x]$. (*) On pose $Y(p)=\mathcal{L}\big[y(x)\big]$. Or $\mathcal{L}\big[y''(x)\big]=p^2\,Y(p)-p\,y(0^+)-y'(0^+)=p^2\,Y(p)-p$ et $\mathcal{L}\big[y'(x)\big]=p\,Y(p)-1$ et $\mathcal{L}[x\,e^x]=\frac{1}{(p-1)^2}$.
   b. On reporte dans (*) : $p^2\,Y(p)-p-2\,p\,Y(p)+2+Y(p)=\frac{1}{(p-1)^2}$ d'où $Y(p)\,\big(p^2-2\,p+1\big)=\frac{1}{(p-1)^2}+p-2\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{p-2}{p-1-1}\right)=\frac{1}{(p-1)^4}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{p-1}$

c. La solution de (E) est $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\big[Y(p)\big]$.
D'où $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(p-1)^4}\Big] - \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{(p-1)^2}\Big] + \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{p-1}\Big] = \frac{x^3}{6}\, e^x - x\, e^x + e^x$ d'où $y(x) = e^x\Big(\frac{x^3}{6} - x + 1\Big)$

V.2.2. Trouver la solution d'un système différentiel

Soit à résoudre : (S) : $\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial x} = 4\,y_1 + 4\,y_2 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} = y_1 + 4\,y_2 \end{cases}$ avec les conditions initiales : $\begin{matrix} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{matrix}$

On pose $Y_1 = \mathcal{L}[y_1]$ et $Y_2 = \mathcal{L}[y_2]$.

Étape 1 : On applique $\mathcal{L}$ au système (S) : $\begin{cases} \mathcal{L}\Big[\frac{\partial y_1}{\partial x}\Big] = 4\,\mathcal{L}[y_1] + 4\,\mathcal{L}[y_2] \\ \mathcal{L}\Big[\frac{\partial y_2}{\partial x}\Big] = \mathcal{L}[y_1] + 4\,\mathcal{L}[y_2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\,Y_1 = 4\,Y_1 + 4\,Y_2 \\ p\,Y_2 - 1 = Y_1 + 4\,Y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-4)\,Y_1 - 4\,Y_2 = 0 \\ -\,Y_1 + (p-4)\,Y_2 = 1 \end{cases}$

Étape 2 : La résolution du dernier système donne $Y_1 = \frac{4}{p^2 - 8\,p + 12} = \frac{4}{(p-6)\,(p-2)}$ et $Y_2 = \frac{p-4}{p^2 - 8\,p + 12} = \frac{p-4}{(p-6) - p - 2)}$

Étape 3 : La solution du système (S) est obtenue en prenant $\mathcal{L}^{-1}$ d'où :

$$y_1(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{4}{(p-6)\,(p-2)}\Big] = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{p-6}\Big] - \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{p-2}\Big] = e^{6x} - e^{2x}$$

$$y_2(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{p-4}{(p-6) - p - 2)}\Big] = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{p-6}\Big] + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{p-2}\Big] = \frac{1}{2}\,(e^{6x} + e^{2x})$$

V.2.3. Équation intégro-différentielle

Résoudre : (1) $\int_0^x \cos(x-t)\, y(t) = e^{a x}$; $a \neq 0$ et (2) $y(x) + 2\int_0^x y'(t)\sin(x-t)\, dt = e^{-x}$ avec $y(0) = 1$

a) $\int_0^x \cos(x-t)\, y(t) = e^{a x} = (\cos * y)\,(x) = e^{a x}$
On sait que $\mathcal{L}\big[(\cos * y)(x)\big] = \mathcal{L}[\cos x] \times \mathcal{L}\big[y(x)\big]$; on pose $Y(p) = \mathcal{L}\big[y(x)\big]$

D'où (1) $\Rightarrow \mathcal{L}[\cos x] \times \mathcal{L}[Y(x)] = \mathcal{L}[e^{a x}] \Leftrightarrow \frac{p}{p^2+1} \times Y(p) = \frac{1}{p-a} \Rightarrow Y(p) = \frac{p^2+1}{p} \cdot \frac{1}{p-a} = 1 - \frac{a}{p-a} + \frac{1}{p\,(p-a)} = 1 - \frac{a}{p-a} - \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-a}\Big)$ d'où $Y(p) = 1 - \frac{1}{a}\frac{1}{p} + \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\frac{1}{p-a}$.

La solution de (1) est $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\big[Y(p)\big] = \mathcal{L}^{-1}[1] - \frac{1}{a}\,\mathcal{L}\Big[\frac{1}{p}\Big] + \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{p-a}\Big] \Rightarrow y(x) = \delta(x) - \frac{1}{a}\,U(x) + \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\, e^{a x}\, U(x)$

b) (2) $\Leftrightarrow y(x) + 2\,(y' * \sin)(x) = e^{-x} \Rightarrow \mathcal{L}\big[y(x)\big] + 2\,\mathcal{L}\big[(y' * \sin)(x)\big] = \mathcal{L}\big[e^{-x}\big]$; On pose $Y(p) = \mathcal{L}\big[y'(x)\big]$.
$\Rightarrow T(p) + 2\,(p\,Y(p) - 1)\,\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p+1} \Rightarrow Y(p)\,\Big(\frac{p^2 + 1 + 2\,p}{p^2+1}\Big) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p^2+1} \Leftrightarrow Y(p)\,\frac{(p+1)^2}{p^2+1} = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p^2+1}$
$\Rightarrow Y(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} = \frac{p^2 + 2\,p + 3}{(p+1)^3}$. Or $\frac{p^2 + 2\,p + 3}{(p+1)^3} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{(p+1)^2} + \frac{c}{(p+1)^3}$; $c = 2$
$p \times \frac{p^2 + 2\,p + 3}{(p+1)^3} = \frac{p\,a}{p+1} + \frac{p\,b}{(p+1)^2} + \frac{p\,c}{(p+1)^3}$ et on fait $p \to +\infty \Rightarrow 1 = a + 0 + 0 \Rightarrow a = 1$.
On pose $p = 0 \Rightarrow \frac{3}{1} = a + b + c \Rightarrow b = 3 - a - c = 0$. D'où $\frac{p^2 + 2\,p + 3}{(p+1)^3} = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p+1)^3}$.

La solution de (2) est $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{p+1}\Big] + \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2}{(p+1)^3}\Big] = e^{-x} + e^{-x}\, x^2$

VI. Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

Soit f une fonction réelle pour $x \in \mathbb{R}_-^*$ et soit F sa transformée de Laplace.

On sait que : $\mathcal{L}\big[f'(x)\big] = \int_0^{+\infty} e^{-p t}\, f'(t)\, dt = p\,F(p) - f(0^+)$ (*)

VI.1. Théorème de la valeur initiale

Si $p \to +\infty \Rightarrow e^{-p t} \to 0$, en admettant que $\lim\limits_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p t}\, f'(t)\, dt = 0$

Alors d'après (*) on a $0 = \lim\limits_{p \to +\infty}\Big(p\,F(p) - f(0^+)\Big)$ c'est à dire $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} p\,F(p) = f(0^+)}$

VI.2. Théorème de la valeur finale

Si $p \to 0 \Rightarrow e^{-p t} \to 1$, en admettant que $\lim\limits_{p \to 0} \int_0^{+\infty} e^{-p t}\, f'(t)\, dt = f(+\infty) - f(0^+)$

Alors d'après (*) on a : $f(+\infty)-f(0^+)=\lim\limits_{p\to 0}\Big(p\,F(p)-f(0^+)\Big)$ c'est à dire $\boxed{\lim\limits_{p\to 0} p\,F(p)=f(+\infty)}$

Exemple : Soit $g(t)=e^{at}\,U(t)$; $a\in\mathbb{C}$ avec $\Re(a)<0$ alors $G(p)=\mathcal{L}\big[g(t)\big]=\frac{1}{p-a}$

1. Théorème de la valeur initiale : $\lim\limits_{p\to+\infty} p\,G(p)=\lim\limits_{p\to+\infty} p\,\frac{1}{p-a}=1$ et $g(0)=1$

   Donc on a bien $\lim\limits_{p\to+\infty} p\,G(p)=g(0^+)$

2. Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{p\to 0} p\,G(p)=\lim\limits_{p\to 0} p\,\frac{1}{p-a}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} e^{at}\,U(t)=0$ car $\Re(a)<0$

   Donc on a bien $\lim\limits_{p\to 0} p\,G(p)=\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$

$f(x)\longleftrightarrow F(p)$

$\lambda\,f+\mu\,g$	$\lambda\,F+\mu\,G$	
$f(a\,x)$	$\frac{1}{a}\,F\big(\frac{p}{a}\big)$	
$f(x-a)\,U(x-a)$	$e^{-ap}\,F(p)$	
$e^{-ax}\,f(x)$	$F(p+a)$	
$f'(x)$	$p\,F(p)-f(0^+)$	
$-\,x\,f(x)$	$F'(p)$	
$\int_0^x f(t)\,dt$	$\frac{F(p)}{p}$	
$\frac{f(x)}{x}$	$\int_p^{+\infty} F(u)\,du$	
$(f*g)(x)$	$F(p)\times G(p)$	
$U(x)$	$\frac{1}{p}$	
δ	1	
x^{α}	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$\Gamma(n+1)=n!$ si $n\in\mathbb{N}$
$\sqrt{x}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\,p^{3/2}}$	
e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$	
$\cos(\omega\,x)$	$\frac{p}{p^2+w^2}$	
$\sin(\omega\,x)$	$\frac{\omega}{p^2+w^2}$	
$\operatorname{ch}(\omega\,x)$	$\frac{p}{p^2-w^2}$	
$\operatorname{sh}(\omega\,x)$	$\frac{\omega}{p^2-w^2}$	