# Espaces préhibertiens complexes

## I. Applications semi-linéaires – formes quadratiques

Def : Soit $E$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. On appelle forme sesquilinéaire sur $E\times E$ toute application $\varphi\colon E\times E\to\mathbb{C}$ tq

i. $\forall\, x,x',y\in\mathbb{C}$ ; $\forall\,\lambda\in\mathbb{C}$ $\begin{cases}\bullet\ \varphi(x+x',y)=\varphi(x,y)+\varphi(x',y)\\ \bullet\ \varphi(\lambda\, x,y)=\bar{\lambda}\,\varphi(x,y)\end{cases}$ : $\varphi$ est semi-linéaire par rapport à la 1ère place

ii. $\forall\, x,y,y'\in\mathbb{C}$ ; $\forall\,\lambda\in\mathbb{C}$ $\begin{cases}\bullet\ \varphi(x,y+y')=\varphi(x,y)+\varphi(x,y')\\ \bullet\ \varphi(x,\lambda\, y)=\lambda\,\varphi(x,y)\end{cases}$ : $\varphi$ est linéaire par rapport à la 2ème place

Def : Une forme sesquilinéaire $\varphi\colon E\times E\to\mathbb{C}$ est dite à symétrie hermitienne ssi $\forall\, x,y\in E\quad \varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$. Une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne est aussi dite forme sesquilinéaire hermitienne

Proposition : Pour qu'une application $\varphi\colon E\times E\to\mathbb{C}$ soit une forme sesquilinéaire hermitienne il faut et il suffit que :

i. $\forall\, x,y\in E\quad \varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$

ii. $\forall\, x,y,y'\in E$ ; $\forall\,\lambda\in\mathbb{C}$ $\begin{cases}\bullet\ \varphi(x,y+y')=\varphi(x,y)+\varphi(x,y')\\ \bullet\ \varphi(x,\lambda\, y)=\lambda\,\varphi(x,y)\end{cases}$ : $\varphi$ est linéaire par rapport à la 2ème place

Proposition : Soit $\varphi$ une forme sesquilinéaire sur $E\times E$. Pour tout $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ; $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{C}$ et $x_1,\ldots,x_n$ ; $y_1,\ldots,y_n\in E$ on a $\varphi(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k,\sum_{j=1}^n \beta_j x_j)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n \overline{\alpha_k}\beta_j\,\varphi(x_k,y_j)$

Def : Soit $\varphi$ une forme sesquilinéaire hermitienne sur $E\times E$. On appelle forme quadratique hermitienne associée à $\varphi$ l'application $\Phi\colon \begin{array}{l}E\longrightarrow\mathbb{C}\\ x\mapsto\Phi(x)=\varphi(x,x)\end{array}$

Exemple : Soit $\varphi\colon \begin{array}{c}\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}\\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)\mapsto\overline{x_1}\,y_2+\overline{x_2}\,y_1\end{array}$ $(E=\mathbb{C}^2)$

$\varphi$ est une forme sesquilinéaire hermitienne et la forme quadratique hermitienne associée est définie par $\Phi\colon \begin{array}{c}\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}\\ (x_1,x_2)\mapsto\overline{x_1}\,x_2+\overline{x_2}\,x_1\end{array}$

Remarques :

1. Soit $\Phi\colon E\to\mathbb{C}$ une application. On dit que $\Phi$ est une forme quadratique hermitienne ssi il existe une forme sesquilinéaire hermitienne $\varphi\colon E\times E\to\mathbb{C}$ telle que $\Phi$ soit la forme quadratique hermitienne associée.
2. La forme quadratique hermitienne est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $\Phi\colon E\to\mathbb{R}$.
   En effet : la symétrie hermitienne de $\varphi$ donne $\forall\, x\in E\quad \varphi(x,x)=\overline{\varphi(x,x)}\Rightarrow\varphi(x,x)\in\mathbb{R}$.

Def : Soit $\varphi$ une forme sesquilinéaire hermitienne définie sur un $\mathbb{C}$ espace vectoriel $E$.
On appelle noyau de $\varphi$ et on note $\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in E\ /\ \forall\, y\in E\quad\varphi(x,y)=0\}=E^{\perp}$.
Une forme sesquilinéaire hermitienne $\varphi$ est dite non dégénérée (resp. dégénérée) ssi $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$ (resp. $\operatorname{Ker}\varphi\neq\{0\}$)

Exemple : Soit $\varphi\colon \begin{array}{c}\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}\\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)\mapsto\overline{x_1}\,y_1\end{array}$ $(E=\mathbb{C}^2)$

$\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in E\ /\ \forall\, y\in E\quad\varphi(x,y)=0\}=\{x\in E\ /\ \forall\, y\in E\quad\overline{x_1}\,y_1=0\}\Rightarrow\overline{x_1}=0\Rightarrow x_1=0$

Donc $x=(x_1,x_2)\in\operatorname{Ker}\varphi$ ssi $x=(0,x_2)=x_2\,(0,1)\Rightarrow\operatorname{Ker}\varphi=\big\langle(0,1)\big\rangle$ qu'on note $\mathbb{C}(0,1)\Rightarrow\varphi$ est dégénérée

Def : Soit $\Phi$ une forme quadratique hermitienne

1. Un vecteur $x\in E$ est dit isotrope ssi $\Phi(x)=0$ ; l'ensemble des vecteurs isotropes est noté $C(\Phi)$ (cône isotrope)
2. $\Phi$ est dite définie ssi $\forall\, x\in E\quad\Phi(x)=0\Rightarrow x=0$
3. $\Phi$ est dite positive ssi $\forall\, x\in E\quad\Phi(x)\geqslant 0$

Propositions :

1. Si $\Phi$ est définie alors $\varphi$ est non dégénérée
2. Si $\begin{cases}\varphi \text{ non dégénérée}\\ \Phi \text{ positive}\end{cases}$ alors $\Phi$ est définie

Démo : $\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in E\ /\ \forall\, y\in E\quad\varphi(x,y)=0\}$

Soit $x\in\operatorname{Ker}\varphi\Rightarrow\varphi(x,x)=0\Leftrightarrow\Phi(x)=0\Rightarrow x\in C(\Phi)\Rightarrow\operatorname{Ker}\varphi\subset C(\Phi)$

1. Si $\Phi$ est définie alors $C(\Phi)=\{0\}$. Comme $\operatorname{Ker}\varphi\subset C(\Phi)\Rightarrow\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}\Rightarrow\varphi$ non dégénérée

2. Supposons que $\varphi$ est non dégénérée et $\Phi$ est positive

Soit $x \in C(\Phi)$ alors : $\forall\, y \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ on a $0 \leqslant \Phi(y+\lambda\, x) = \varphi(y+\lambda\, x, y+\lambda\, x) = \varphi(y, y) + \bar{\lambda}\, \varphi(x, y) + \lambda\, \varphi(y, x) + \bar{\lambda}\, \lambda\, \varphi(x, x) = \Phi(y) + \bar{\lambda}\, \overline{\varphi(y, x)} + \lambda\, \varphi(y, x) = \Phi(y) + 2\, \Re\big(\lambda\, \varphi(y, x)\big)$ $\Re \equiv$ partie réelle, $\Im \equiv$ partie imaginaire

Choisissons $\lambda = \mu\, \overline{\varphi(y, x)}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. On déduit alors $\forall\, y \in E$, $\forall\, \mu \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leqslant \Phi(y) + 2\, \Re\big(\mu\, \overline{\varphi(y, x)}\ \varphi(y, x)\big) = \Phi(y) + 2\, \mu\, \big(\varphi(y, x)\big)^2$. D'où nécessairement $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $y \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} \varphi$. Comme $\varphi$ est non dégénérée par hypothèse $\Rightarrow x = 0$ et donc $C(\Phi) = 0$ donc $\Phi$ est définie.

Proposition : Soit $\varphi$ une forme sesquilinéaire hermitienne sur $E$ et $\Phi$ la forme quadratique hermitienne associée à $\varphi$ on a

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ ; $\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ ; $\forall\, x_1, \ldots, x_n \in E$ $\quad \Phi\big(\sum_{k=1}^n \alpha_k\, x_k\big) = \varphi\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k\, x_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j\, x_j\Big) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2\, \Phi(x_k) + 2 \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} \Re\big(\overline{\alpha_k}\, \alpha_j\, \varphi(x_k, x_j)\big)$
2. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall\, x, y \in E$ $\quad \Phi(\alpha\, x + \beta\, y) = |\alpha|^2\, \Phi(x) + 2\, \Re\big(\bar{\alpha}\, \beta\, \varphi(x, y)\big) + |\beta|^2\, \Phi(y)$
3. $\forall\, x, y \in E$ $\quad \Phi(x+y) = \Phi(x) + 2\, \Re\big(\varphi(x, y)\big) + \Phi(y)$
4. $\forall\, x, y \in E$ $\quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4}\big[\Phi(x+y) - i\, \Phi(x+i\, y) - \Phi(x-y) + i\, \Phi(x-i\, y)\big]$
5. $\forall\, x, y \in E$ $\quad \Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2\, \big(\Phi(x) + \Phi(y)\big)$

Remarque : La formule 4. montre que $\Phi$ détermine entièrement $\varphi$ (c'est à dire si $\Phi$ est une form quadratique hermitienne, il existe une form sesquilinéaire hermitienne unique telle que $\Phi$ soit la forme quadratique hermitienne associée à $\varphi$). $\varphi$ est appelée la forme polaire de $\Phi$.

# II. Produit scalaire hermitien – Norme hermitienne

## II.1. Produit scalaire hermitien

Def : Soit $E$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel un produit scalaire hermitien sur $E$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ tq :

1. $\varphi$ est une forme sesquilinéaire hermitienne
2. $\forall\, x \in E \backslash \{0\}$ $\quad \varphi(x, x) > 0$

Remarque : 2. peut être remplacé par : 3. $\forall\, x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$ ; $\varphi$ est positive
4. $\forall\, x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ; $\varphi$ est dite définie

Règles de calcul : Soit $x_1, \ldots, x_n \in E$ ; $y_1, \ldots, y_n \in E$ ; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ; $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{C}$. En tenant compte de la sesquilinéairité et de la symétrie hermitienne on a :

- $\Big\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i\, x_i \Big/ \sum_{j=1}^p \mu_j\, y_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \overline{\lambda_i}\, \mu_j\, \langle x_i / y_j \rangle$
- $\Big\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i\, x_i \Big/ \sum_{j=1}^n \lambda_j\, x_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\, \langle x_i / x_i \rangle + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \big[\overline{\lambda_i}\, \lambda_j\, \langle x_i / x_j \rangle + \overline{\lambda_j}\, \lambda_i\, \langle x_j / x_i \rangle\big] = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\, \langle x_i / x_i \rangle + 2\, \Re\Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overline{\lambda_i}\, \lambda_j\, \langle x_i / x_j \rangle\Big)$

Exemples :

1. $E = \mathbb{C}^n$ ; $\varphi : \begin{array}{c} E \times E \to \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i}\, y_i \end{array}$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. C'est le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$
2. $E = \mathcal{C}_{[a,b]}^k$ ; $a, b \in \mathbb{R}$ ; $a < b$ et $k \geqslant 0$. $\varphi : \begin{array}{c} E \times E \to \mathbb{C} \\ (f, g) \mapsto \varphi(f, g) = \int_a^b \bar{f}\, g \end{array}$ est un produit scalaire hermitien sur $E$.

Def : Un espace préhibertien complexe est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien.

## II.2. Norme hermitienne

Soit $E$ un espace préhibertien complexe, le produit scalaire hermitien de deux vecteurs $x$ et $y$ sera noté $\langle x / y \rangle$.
Pour tout $x \in E$ $\quad \langle x / x \rangle \in \mathbb{R}_+$ ; on note $\|x\| = \sqrt{\langle x / x \rangle}$. De plus :

- $\forall\, x \in E \backslash \{0\}$ $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x / x \rangle} > 0$
- $\forall\, x \in E$ $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x / x \rangle} \geqslant 0$
- $\forall\, x \in E$ $\quad \|x\| = 0 \Rightarrow \langle x / x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

i. $\forall\, x, y \in E \quad \left|\langle x/y\rangle\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)

ii. $\forall\, x, y \in E \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski)

Démo : Soit $x, y \in E$

i. $\forall\, \lambda \in \mathbb{C} \quad \|\lambda\, x + y\|^2 = \langle \lambda\, x + y/\lambda\, x + y\rangle = |\lambda|^2\, \|x\|^2 + 2\,\Re\big(\bar{\lambda}\ \langle x/y\rangle\big) + \|y\|^2 \geqslant 0 \quad (1)$
Posons $r = \left|\langle x/y\rangle\right|$ et $\langle x/y\rangle = r\, e^{i\theta}$. On déduit alors de (1) et choisissons $\lambda = t\, e^{i\theta}$ avec $t \in \mathbb{R}$ : $\|t\, e^{i\theta}\, x + y\|^2 = t^2\, \|x\|^2 + 2\,\Re\big(t\ e^{-i\theta}\, r\, e^{i\theta}\big) + \|y\|^2 = t^2\, \|x\|^2 + 2\, t\, r + \|y\|^2 \geqslant 0$.
Si $x \neq 0$ alors $t \mapsto \|t\ e^{i\theta}\ x + y\|^2$ est une fonction polynomiale réelle du second degré à valeurs positives, son discriminant réduit est donc négatif ou nul d'où $\Delta' = r^2 - \|x\|^2\, \|y\|^2 \leqslant 0 \Rightarrow r \leqslant \|x\|\, \|y\|$ c'est à dire $\left|\langle x/y\rangle\right| \leqslant \|x\|\, \|y\|$.
Si $x = 0$ alors $\langle x/y\rangle = 0$ et i. est encore vérifiée.

ii. En utilisant $\Re\big(\langle x/y\rangle\big) \leqslant \left|\langle x/y\rangle\right| \leqslant \|x\|\ \|y\|$ on a alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\ \Re\big(\langle x/y\rangle\big) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\, \|x\|\, \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Théorème : Cas d'égalité de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

i. $\left|\langle x/y\rangle\right| = \|x\|\, \|y\|$ ssi $(x, y)$ liés.

ii. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi $(x, y)$ positivement liés.

Démo :

i. Supposons $\left|\langle x/y\rangle\right| = \|x\|\, \|y\|$.
Si $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ et $(x, y)$ liés.
Sinon alors puisqu'on a $\left|\langle x/y\rangle\right| = \|x\|\, \|y\| \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow$ il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ racine double de $t^2\, \|x\|^2 + 2\, t\, r + \|y\|^2 = 0$ c'est à dire $\|t_1\, e^{i\theta}\, x + y\|^2 = 0 \Rightarrow t_1\, e^{i\theta}\, x + y = 0 \Rightarrow (x, y)$ liés.
Réciproquement si $(x, y)$ liés alors on a bien $\left|\langle x/y\rangle\right| = \|x\|\, \|y\|$.

Théorème : Norme hermitienne L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\langle x/x\rangle} \end{array}$ est une norme sur $E$.

Démo : $\forall\, x \in E \quad \|x\| = 0 \Rightarrow \langle x/x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \forall\, x \in E \quad \|\lambda\, x\| = \sqrt{\langle \lambda\, x/\lambda\, x\rangle} = \sqrt{\bar{\lambda}\, \lambda\, \langle x/x\rangle} = |\lambda|\, \sqrt{\langle x/x\rangle} = |\lambda|\, \|x\|$
$\forall\, x, y \in E \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

**Formulaire** $\forall\, x, y \in E$ on a :

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\Re\big(\langle x/y\rangle\big) + \|y\|^2$
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\Re\big(\langle x/y\rangle\big) + \|y\|^2$
3. $\|x + i\, y\|^2 = \|x\|^2 + i\ \langle x/y\rangle - i\ \langle y/x\rangle + \|y\|^2$
4. $\|x - i\, y\|^2 = \|x\|^2 - i\ \langle x/y\rangle + i\ \langle y/x\rangle + \|y\|^2$
5. $\langle x/y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\ \|x + i\, y\|^2 + i\ \|x - i\, y\|^2\right]$

Remarque : 5. s'appelle l'identité de polarisation, elle permet de retrouver le produit scalaire hermitien à partir de la norme.

# III. Espaces Hermitiens

Def : On appelle espace hermitien un espace préhibertien complexe de dimension finie, non nulle.

## III.1. Matrice d'une forme sesquilinéaire hermitienne dans une base

Soit $E$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n$ et $\varphi$ une forme sesquilinéaire hermitienne sur $E \times E$ et $\Phi$ la forme quadratique hermitienne associée à $\varphi$.

Def : Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. On appelle matrice de $\varphi$ (ou de $\Phi$) dans $B$ la matrice
$\mathcal{M}_B(\varphi) = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$

Remarque :

- $\forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad a_{ii} = \Phi(e_i) \in \mathbb{R}$
- Puisque $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!] \quad \varphi(e_i, e_j) = \overline{\varphi(e_j, e_i)} \Rightarrow {}^t A = \bar{A}$. Soit aussi $A = {}^t\bar{A}$
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $A = {}^t\bar{A}$ est dite matrice hermitienne

Propriétés :

1. Soit $E$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n$, $\varphi$ une forme sesquilinéaire hermitienne et $\Phi$ la forme quadratique hermitienne associée à $\varphi$. Soit $A=\mathcal{M}_B(\varphi)$ où $B$ est une base de $E$.
Pour tout $x,y\in E$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\Rightarrow X={}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ et $Y={}^t\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$
   i. $\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x_i}\, y_j\, \varphi(e_i,e_j)={}^t\bar{X}\,A\,Y$
   ii. $\Phi(x)=\varphi(x,x)=\sum_{i=1}^n |x_i|^2+2\,\Re\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \bar{x_i}\, x_j\, \varphi(e_i,e_j)\Big)={}^t\bar{X}\,A\,X$

   Exemple : Soit $\varphi$ une forme sesquilinéaire hermitienne définie sur $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2$ dont la matrice est $A=\begin{pmatrix} 4 & 2-i \\ 2+i & -5 \end{pmatrix}$.
   Donner l'expression de $\varphi$ et celle de $\Phi$.
   $\forall\, x,y\in E=\mathbb{C}^2,\quad \varphi(x,y)={}^t\bar{X}\,A\,Y=\begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2-i \\ 2+i & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\,y_1+(2-i)\,y_2 \\ (2+i)\,y_1-5\,y_2 \end{pmatrix}$
   $\Rightarrow \varphi(x,y)=4\,\bar{x_1}\,y_1+(2-i)\,\bar{x_1}\,y_2+(2+i)\,\bar{x_2}\,y_1-5\,\bar{x_2}\,y_2$
   $\forall\, x\in E,\quad \Phi(x)=\varphi(x,x)=4\,\overline{x_1}\,x_1+(2-i)\,\overline{x_1}\,x_2+(2+i)\,\overline{x_2}\,x_1-5\,\overline{x_2}\,x_2=4\,|x_1|^2+2\,\Re\big((2+i)\,\bar{x_1}\,x_2-5\,|x_2|^2$

2. Si $B$ et $B'$ sont deux bases de $E$ et $P$ la matrice de passage de $B$ à $B'$. En posant $A=\mathcal{M}_B(\Phi)$ et $A'=\mathcal{M}_{B'}(\Phi)$ on a alors $A'={}^t\bar{P}\,A\,P$

3. 
   - Deux vecteurs $x$ et $y$ sont dits $\varphi$ orthogonaux lorsque $\varphi(x,y)=0$
   - Une base $B$ est dite orthogonale si $\mathcal{M}_B(\varphi)$ est diagonale. Dans une telle base, $\Phi(x)=\sum_{i=1}^n a_{ii}\,|x|^2$
   C'est à dire que $\Phi$ est réduite à des carrés.

## III.2. Bases orthogonales

Propositions :

- Pour tout sous espace $F$ dun espace hermitien $E$ on a : $E=F\oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp^\perp}=F$
- Un espace hermitien $E$ admet au moins une base orthonormale.
Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$ et notons $G_B=\big(\langle e_i/e_j\rangle\big)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ la matrice du produit scalaire dans la base $B$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $B$ orthonormale

ii. $G_B=I_n$

iii. $\forall\, x,y\in E\quad \langle x/y\rangle=\sum_{i=1}^n \bar{x_i}\,y_i={}^t\bar{X}\,Y$

iv. $\|x\|^2=\sum_{i=1}^n |x_i|^2={}^t\bar{X}\,X$

Propriété : Si $B=(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de $E$, alors $\forall\, x\in E\quad x=\sum_{i=1}^n \langle e_i/x\rangle e_i$ c-à-d $x_i=\langle e_i/x\rangle$.

Théorème : Orthogonalisation de Schmidt
Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base d'un espace hermitien $E$. Il existe une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ orthonormale de $E$ telle que $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$

Démo : $v_1=u_1$ puis $e_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$. Pour $i\geqslant 2$ : $v_i=u_i-\sum_{k=1}^{i-1}\langle u_i/v_k\rangle\,v_k$ puis $e_i=\frac{v_i}{\|v_i\|}$

# IV. Endomorphismes remarquables d'un espace hermitien

Soit $E$ un espace hermitien de dimension $n\geqslant 1$ et $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de $E$

## IV.1. Adjoint d'un endomorphisme

Def : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ on dit que $f$ admet un adjoint ssi $\exists\, f^*\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\, x,y\in E\quad \big\langle f(x)/\,y\big\rangle=\big\langle x/\,f^*(y)\big\rangle$

Remarque : On a montré que $\forall\, x\in E\quad x=\sum_{i=1}^n \langle e_i/x\rangle\,e_i$.

Comme $f^*(y)\in E$ alors $f^*(y)=\sum_{i=1}^n \big\langle e_i/\,f^*(y)\big\rangle\,e_i=\sum_{i=1}^n \big\langle f(e_i)/\,y\big\rangle\,e_i$

Propriétés :

1. $\forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \ \forall\, f,g\in\mathcal{L}(E)\quad (\alpha\,f+\beta\,g)^*=\bar{\alpha}\,f^*+\bar{\beta}\,g^*$
2. $\forall\, f,g\in\mathcal{L}(E)\quad (g\circ f)^*=f^*\circ g^*\Rightarrow (f^*)^*=f$ et $e^*=e$
3. $\forall\, f\in\mathcal{L}(E)\quad \big(f^{-1}\big)^*=(f^*)^{-1}$

## IV.2. Image et noyau

Pour tout $f\in\mathcal{L}(E)$ $\quad \mathrm{Ker}\ f^*=(\mathrm{Im}\ f)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\ f^*=(\mathrm{Ker}\ f)^{\perp}$

## IV.3. Matrice de l'adjoint *dans une base orthonormale*

Théorème : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, soit $B=(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormale de $E$ alors $\mathcal{M}_B(f^*)={}^t\overline{\mathcal{M}_B(f)}$

Démo :

D'après la définition de l'adjoint on a $\forall\, x,\, y\in E \quad \big\langle f(x)/y\big\rangle=\big\langle x/f^*(y)\big\rangle \Rightarrow \forall\, i,\, j\in[\![1,n]\!] \quad \big\langle f(e_i)/e_j\big\rangle=\big\langle e_i/f^*(e_j)\big\rangle$. D'après la symétrie hermitienne on a $\big\langle e_i/f^*(e_j)\big\rangle=\overline{\big\langle e_j/f(e_i)\big\rangle}$.

Or le terme général de $\mathcal{M}_B(f)$ et $\big\langle e_i/f(e_j)\big\rangle$ **et/est** celui de $\mathcal{M}_B(f^*)=\big\langle e_i/f^*(e_j)\big\rangle$. (*)
Comme on a $\forall\, i,j\in[\![1,n]\!] \quad \big\langle e_i/f^*(e_j)\big\rangle=\overline{\big\langle e_j/f(e_i)\big\rangle}$ alors $\mathcal{M}_B\big(f^*\big)={}^t\overline{\mathcal{M}_B(f)}$

Preuve de (*) :

Appelons $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}=\mathcal{M}_B(f)\Leftrightarrow\mathcal{M}_B(f)=\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & \cdots & f(e_n)\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & a_{ij} & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1\\ \vdots\\ e_n\end{matrix}\end{array} \Rightarrow f(e_j)=\sum_{i=1}^n a_{ij}\,e_i$
$\Rightarrow\big\langle e_i/f(e_j)\big\rangle=\big\langle e_i/\sum_{i=1}^n a_{ij}\,e_i\big\rangle=a_{ij}\langle e_i/e_i\rangle=a_{ij}$

Conséquence : Un endomorphisme et son adjoint ont des polynômes caractéristiques conjuqués.
Si l'un est diagonalisable, l'autre l'est aussi.

Def :

- Un automorphisme $f\in\mathcal{GL}(E)$ est dit unitaire lorsque $f^*=f^{-1}$, c'est à dire $\forall\, x,y\in E \quad \big\langle f(x)/y\big\rangle=\big\langle x/f^{-1}(y)\big\rangle$
- Un endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$ est dit hermitien lorsque $f^*=f$, c'est à dire $\forall\, x,y\in E \quad \big\langle f(x)/y\big\rangle=\big\langle x/f(y)\big\rangle$

## IV.4. Automorphisme unitaire d'un espace hermitien

Théorème et def :

i. L'ensemble des automorphismes unitaires d'un espace hermitien $E$ est un sous groupe du $\mathcal{GL}(E)$, appelé groupe unitaire de $E$ et noté $\mathcal{U}(E)$.
ii. $\{f\in\mathcal{U}(E) \text{ tq } \det(f)=1\}$ est un sous groupe de $\mathcal{U}(E)$ appelé groupe spécial unitaire noté $\mathcal{SU}(E)$

Remarque : Puisque $f^*=f^{-1}\Rightarrow\det(f^{\times})=\frac{1}{\det(f)}\Rightarrow\det(f^*)\det(f)=1$ or $\mathcal{M}_B(f^*)={}^t\overline{\mathcal{M}_B(f)}\Rightarrow\det f^*=\det\big(\overline{\mathcal{M}_B(f)}\big)=\overline{\det(f)}$ d'où $\overline{\det f}\,\det f=1\Rightarrow\boxed{|\det f|=1}$

### IV.4.1. Caractéristique des endomorphismes unitaires

Proposition : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $\forall\, x,y\in E \quad \langle f(x)/f(y)\rangle=\langle x/y\rangle$ $\qquad f$ conserve le produit scalaire
ii. $\forall\, x\in E \quad \|f(x)\|=\|x\|$ $\qquad f$ conserve la norme
iii. $f\subset\mathcal{U}(E)$

Démo :

$i\Rightarrow ii)$ Pendre $y=x$
$ii)\Rightarrow i)$ $\forall\, x,\, y\in E \quad \big\langle f(x)/f(y)\big\rangle=\frac{1}{4}\big(\|f(x)+f(y)\|^2-\|f(x)-f(y)\|^2-i\,\|f(x)+i\,f(y)\|^2+i\,\|f(x)-i\,f(y)\|^2\big)=\frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2-i\,\|x+i\,y\|^2+i\,\|x-i\,y\|^2\big)=\langle x/y\rangle$.
Le reste de la démonstration est analoque à celle vue pour les automorphisme orhtogonaux.

Théorème :

1. Un endomorphisme $f$ de $E$ est unitaire ssi l'image par $f$ d'une base orthonormale est une base orthonormale
2. Un endomosphisme $f$ de $E$ est unitaire ssi sa matrice $M$ dans une base orthonormale $B$ vérifie ${}^t\bar{M}M=I$

Démo : $f$ unitaire $\Rightarrow f$ conserve la norme $\Rightarrow\forall\, x\in E \quad \|f(x)\|=\|x\|\Rightarrow\forall\, x\in E \quad \big\langle f(x)/f(x)\big\rangle=\langle x/x\rangle\Rightarrow\forall\, X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad {}^t\overline{MX}MX={}^t\bar{X}X\Rightarrow\forall\, X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad {}^t\bar{X}\,{}^t\bar{M}MX={}^t\bar{X}X\Rightarrow{}^t\bar{M}M=I$

### IV.4.2. Matrices unitaires

Def :
- $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire ssi ${}^t\bar{M}M=I\Leftrightarrow M^{-1}={}^t\bar{M}$
- Si $M$ est unitaire alors $|\det M|=1$ car ${}^t\bar{M}M=I\Rightarrow\overline{\det M}\,\det M=1\Rightarrow|\det M|=1$

**Caracréristiques des matrices unitaires** :

1. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unitaire ssi ${}^t\bar{M}\,M = M\,{}^t\bar{M} = I$
2. $M^{-1} = {}^t\bar{M}$
3. Le système des vecteurs colonnes (respectivement lignes) de $M$ forme une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitien canonique.

## IV.5. Endomorphismes hermitiens

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit hermitien ssi $f^* = f$ c'est à dire $\forall\, x, y \in E \quad \langle f(x)/y \rangle = \langle x/f(y) \rangle$

**Caractéristiques matricielles** :

L'endomorphisme $f$ est hermitien ssi sa matrice dans une base orthonormale $B$ de $E$ est hermitienne, c'est à dire ${}^t\overline{\mathcal{M}_B(f)} = \mathcal{M}_B(f)$.

Proposition : Les valeurs propres d'un endomorphisme hermitien sont toutes réelles.

Démo : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $f$, alors $\exists\, x \in E \backslash \{0\}$ tq $f(x) = \lambda\, x$.
L'égalité $\langle f(x)/x \rangle = \langle x/f(x) \rangle \Rightarrow \langle \lambda x/x \rangle = \langle x/\lambda x \rangle \Rightarrow \bar{\lambda}\ \langle x/x \rangle = \lambda \langle x/x \rangle$ c'est à dire $\left(\bar{\lambda} - \lambda\right) \|x\|^2 = 0 \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$ car $x$ est un vecteur propre donc $x \neq 0 \ \Rightarrow \lambda$ est réel

Conséquence : Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme hermitien est à coefficients réels et est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Propositions : Soit $f$ un endomorphisme hermitien de $E$.

i. L'image et le noyau de $f$ sont supplémentaires orthogonaux.
ii. Les sous espaces propres de $f$ sont en somme directes orthogonales.
iii. Si $F$ est un sous espace stable par $f$ alors $F^{\perp}$ est stable par $f$.

Même démonstration que pour les endomorphisme symétriques d'une espace euclidien.

Théorème fondamental : Tout endomorphisme hermitien d'un espace hermitien $E$ est diagonalisable, plus précisément il existe une base orthonormale de $E$ formée des vecteurs propres de $f$.

Théorème : Si $M$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne alors

1. Toutes ses valeurs propres sont réelles.
2. Il existe une matrice unitaire $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}\,M\,P$ soit diagonale.

# Exercices

**Exercice 1.** Soit $E$ un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que les valeurs propres de $u^* \circ u$ sont dans $\mathbb{R}_+$.

**Démonstration.** Considérons l'endomorphisme $v = u^* \circ u$ donc $v^* = (u^* \circ u)^* = u^* \circ u = v \Rightarrow v$ est un endomorphisme hermitien $\Rightarrow$ les valeurs propres de $v$ sont réelles.

Soit $\lambda$ valeur propre de $v$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\exists\, x \in E \backslash \{0\}$ tq $v(x) = \lambda\, x$. $\langle v(x)/x \rangle = \langle \lambda\, x/x \rangle = \bar{\lambda}\ \langle x/x \rangle = \lambda\ \langle x/x \rangle$ car $\lambda \in \mathbb{R}$. D'autre part $\langle v(x)/x \rangle = \langle u^* \circ u(x)/x \rangle = \langle u^*(u(x))/x \rangle = \langle u(x)/u^{**}(x) \rangle = \langle u(x)/u(x) \rangle = \|u(x)\|^2$ d'où $\lambda\ \|x\|^2 = \|u(x)\|^2 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+$ □