Espaces Préhilbertiens réels et Espaces Euclidiens

I. Le produit scalaire Euclidien

Euclidien : on travaille dans $\mathbb{R}$ (Hermitien : dans $\mathbb{C}$)

I.1. Def$_1$: Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Un produit scalaire euclidien sur E est une application φ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. φ est bilinéaire sur E
2. φ est symétrique
3. $\forall\, x\in E\backslash\{0\} \quad \varphi(x,x)>0$

Remarque :

1. φ est une forme bilinéaire symétrique
2. Une conséquence de la bilinéarité de φ est que $\varphi(0,0)=0$
3. La propriété 3°) de la définition$_1$ traduit le fait que la forme quadratique associée à φ est définie positive.

Notation : φ est souvent notée : $\varphi(x,y)\equiv \langle x/y\rangle$ ou (x,y) ou $x\cdot y$

Def$_2$: Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E muni d'un produit scalaire φ.
Un tel espace sera noté (E,φ) ou E s'il n'y a pas d'ambiguïté.

I.2. Norme euclidienne

Soit E un espace préhilbertien le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x/y\rangle$.

Pour tout $x\in E \quad \langle x/x\rangle$ est un réel positif. On note $\|x\|=\sqrt{\langle x/x\rangle}$ et on a $\forall\, x\in E \quad \|x\|=0\Rightarrow\sqrt{\langle x/x\rangle}=0\Rightarrow\langle x/x\rangle=0\Rightarrow\varphi(x,x)=0\Rightarrow x=0$ car φ est définie.

Théorème : Inégalité de Schwarz et Minkowski

i. $\forall\, x,y\in E \quad |\langle x/y\rangle|\leqslant\|x\|\,||y\|$: inégalité de Schwarz

ii. $\forall\, x,y\in E \quad \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$: inégalité de Minkowski

Démo :

i. Soit $x,y\in E$ on a $\forall\, t\in\mathbb{R} \quad \|t\,x+y\|^2=t^2\,||x\|^2+2\,t\,\langle x/y\rangle+\|y\|^2\geqslant 0$
Si $x\neq 0 \quad t\mapsto\|t\,x+y\|^2$ est une fonction polynomiale du second degré à valeurs réelles positives. Son discriminant est donc négatif ou nul $\Rightarrow\langle x/y\rangle^2-\|x\|^2\,\|y\|^2\leqslant 0\Rightarrow\big|\langle x/y\rangle\big|\leqslant\|x\|\,\|y\|$.
Si $x=0$ alors $\langle x/y\rangle=0$ et donc $i)$ est encore vérifié.

ii. $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\,\langle x/y\rangle+\|y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\,\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=\big(\|x\|+\|y\|\big)^2\Rightarrow\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

Remarque : Cas d'égalité de Cauchy-Schwarz et Minkowski

i. $|\langle x/y\rangle|=\|x\|\,\|y\|\Leftrightarrow(x,y)$ liés.

ii. $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\Leftrightarrow(x,y)$ positivement liés.

Démo :

i. Supposons que $|\langle x/y\rangle|=\|x\|\,\|y\|$.

Si $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow(x,y)$ liés.

Si $\|x\|\neq 0$ alors $\exists\, t_1\in\mathbb{R}$ racine double pour $t^2\,\|x\|^2+2\,t\,\langle x/y\rangle+\|y\|^2=0$ car cette équation a un discriminant nul, donc $\|t_1\,x+y\|^2=0\Rightarrow t_1\,x+y=0\Rightarrow(x,y)$ liés.

ii. Supposons $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$

Si $x=0\Rightarrow(x,y)$ sont positivement liés car $x=0\cdot y$

Si $x\neq 0$ alors de $\|x+y\|^2=\big(\|x\|+\|y\|\big)^2$ on obtient $\langle x/y\rangle=\|x\|\,\|y\|$ d'après $i)$ il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $y=t\,x$
D'où $\langle x/y\rangle=\langle x/t\,x\rangle=t\langle x/x\rangle=t\,\|x\|^2$ (*) et $\|x\|\,\|y\|=\|x\|\,\|t\,y\|=\|x\|\,\sqrt{\langle t\,x/t\,x\rangle}=\|x\|\,|t|\,\sqrt{\langle x/x\rangle}=|t|\,\|x\|\,\|x\|$ (**). Comme (*) = (**) $\Rightarrow t=|t|=>t\in\mathbb{R}_+$, donc (x,y) sont positivement liés.

Théorème : L'application $\|\cdot\|:\begin{array}{l}E\longrightarrow\mathbb{R}_+\\ x\mapsto\|x\|=\sqrt{\langle x/x\rangle}\end{array}$ est une norme sur E.

Démo :

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda\, x\| = \sqrt{\langle \lambda\, x / \lambda\, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x/x\rangle} = |\lambda|\, \sqrt{\langle x/x\rangle} = |\lambda|\, \|x\|$
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski

Proposition : Pour tout $x, y \in E$

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\langle x/y\rangle + \|y\|^2$
2. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\langle x/y\rangle + \|y\|^2$
3. $\langle x/y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$
4. $\langle x/y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

I.3. Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle \cdot / \cdot \rangle$.

Def$_1$:

i. Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux ssi $\langle x/y\rangle = 0$

ii. Deux parties A et B de E sont dits orthogonales ssi $\forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B \quad \langle x/y\rangle = 0$

iii. On appelle orthogonal d'une partie A de E l'ensemble noté $A^{\perp} = \left\{x \in E \ \ / \ \ \forall\, y \in A \ \ \langle x/y\rangle = 0\right\}$
Si $A = \varnothing$, on pose $A^{\perp} = E \quad ; \quad E^{\perp} = \{0\}$ et $\{0\}^{\perp} = E$.

Def$_2$: Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de E est dite :

1. Orthogonale si $\forall\, i, j \in I,\ i \neq j \quad \langle u_i, u_j\rangle = 0$
2. Orthonormale si $\forall\, i, j \in I \quad \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E, on parle de base orthogonale ou orthonormale. orthonormale $\equiv$ orthonormée

Théorème de Pythagore – Identité du parallélogramme

Théorème$_1$: Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de E on a : $\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$

Si de plus aucun des u_i n'est nul, la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre

Démo :

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} u_i \middle/ \sum_{j=1}^{p} u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle u_i/u_j\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \langle u_i/u_i\rangle}_{\text{(car famille orthogonale)}} = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$$

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tq $\alpha_1\, u_1 + \cdots + \alpha_p\, u_p = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$
$\alpha_1\, u_1 + \cdots + \alpha_p\, u_p = 0 \Rightarrow \langle u_i / \alpha_1\, u_1 + \cdots \alpha_i\, u_i + \cdots + \alpha_p\, u_p\rangle = \langle u_i/0\rangle \Rightarrow \alpha_i \langle u_i/u_i\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_i\, \|u_i\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ car $u_i \neq 0 \Rightarrow \|u_i\| \neq 0$. Donc $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

Théorème$_2$: Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel sont orthogonaux ssi ils vérifient $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Démo : On a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\langle x/y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x/y\rangle = 0 \Leftrightarrow x$ et y sont orthogonaux.

Remarque : Si x et y sont orthogonaux alors on a :
$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ d'où $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$.
C'est l'identité du parallélogramme.

I.4. Supplémentaire orthogonal

Def : On dit qu'un sous espace F de E admet un supplémentaire orthogonal si $E = F \oplus F^{\perp}$.

Il y a deux cas pour lesquels un sous espace F de E admet un supplémentaire orthogonal.

1er cas : *E* est de dimension finie

Théorème : Si l'espace préhilbertien est de dimension finie alors pour tout sous espace F de E on a :

i. $E = F \oplus F^{\perp}$

ii. $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$

iii. $F^{\perp^{\perp}} = F$

Démo : Si F est de dimension p alors soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base de F et soit $f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\langle u_1/x\rangle, \langle u_2/x\rangle, \ldots, \langle u_p/x\rangle) \end{array}$.

f est linéaire ; Soit $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (\langle u_1/x\rangle, \ldots, \langle u_p/x\rangle) = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1, p]\!] \quad \langle u_i, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in F^\perp$ et réciproquement si $x \in F^\perp \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} f$ donc $\operatorname{Ker} f = F^\perp$.

Le théorème du rang donne $\dim F^\perp = \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} f)$. Or $\dim(\operatorname{Im} f) \leqslant p \Rightarrow \dim F^\perp \geqslant \dim E - p \Rightarrow \dim F^\perp \geqslant \dim E - \dim F \Rightarrow \dim F + \dim F^\perp \geqslant \dim E \Rightarrow \dim F + \dim F^\perp = \dim E \Rightarrow F \oplus F^\perp = E$.

2e cas : F est de dimension finie

Théorème : Soit $a \in E\backslash\{0\}$ alors $a^\perp = (\mathbb{R}\, a)^\perp$ est un hyperplan supplémentaire orthogonal à la droite vectorielle $\mathbb{R}\, a$ et on a $E = \mathbb{R}\, a \oplus (\mathbb{R}\, a)^\perp$

Démo : $\forall\, x \in E \quad x = \frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2} a + \left(x - \frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2} a\right)$. On a $\frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2} a \in \mathbb{R}\, a$ et $\left\langle a \middle/ x - \frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2} a \right\rangle = \langle a/x\rangle - \frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2} \langle a/a\rangle = 0$

$\Rightarrow x - \frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2} a \in (\mathbb{R}\, a)^\perp$ donc $E = \mathbb{R}\, a \oplus (\mathbb{R}\, a)^\perp$

Remarque : Si $x \in F \cap F^\perp$ alors $x = 0$ en effet $x \in F$ et $x \in F^\perp$ $\langle x/x\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $\langle \cdot / \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Théorème : Soit F un sous espace de dimension finie de l'espace préhilbertien E alors $E = F \oplus F^\perp$.

Démo :

F de dimension finie p alors F admet une base $(v_1, \ldots, v_p)$. F admet une base orthonormale qu'on note $(e_1, \ldots, e_p)$ (voir orthogonalisation de Schmidt).

Soit $x \in E$. Posons $x = \underbrace{x - \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i}_{=y} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i}_{\in F}$.

$y \in F^\perp$ ssi $\forall\, k \in [\![1, p]\!] \quad \langle y/e_k\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x - \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i / e_k\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x/e_k\rangle - \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle e_i/e_k\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x/e_k\rangle - \lambda_k \langle e_k/e_k\rangle = 0$ donc $y < F^\perp$ ssi $\forall\, k \in [\![1, p]\!] \quad \lambda_k = \langle x/e_k\rangle$ donc $\forall\, x \in E \quad x = \underbrace{x - \sum_{i=1}^p \langle x/e_i\rangle e_i}_{\in F^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \langle x/e_i\rangle e_i}_{\in F}$. Ceci montre que $E = F \oplus F^\perp$.

Théorème de la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

Def : Soit E un espace préhilbertien et F et G deux sous espaces de E supplémentaires, c'est à dire $E = F \oplus G$ donc $\forall\, x \in E \quad \exists!\, (x', x'') \in F \times G$ tq $x = x' + x''$.

L'application $P : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \mapsto x' \end{array}$ est un endomorphisme de E appelé projecteur sur F parallèlement à G.

Théorème et définition : Soit E un préhilbertien et F un sous espace de E de dimension finie.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de F.

On sait alors que $E = F \oplus F^\perp$. Le projecteur sur $F //$ à $F^\perp$ s'appelle projecteur orthogonal et on le note p_F.

$p_F : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \mapsto p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i/x\rangle e_i \end{array}$.

I.5. Orthogonalisation de Schmidt

Théorème : Pour toute famille libre $(a_1, \ldots a_n)$ de E, il existe une famille libre orthogonale $(b_1, \ldots, b_n)$ de E tq $\forall\, k \in [\![1, n]\!] \quad \langle b_1, \ldots, b_k\rangle = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$

Démo : $b_1 = a_1$

Détermination de b_2 : Soit $z = a_2 - \lambda_1 b_1$. Cherchons λ_1 tq $\langle z/b_1\rangle = 0$.

$\langle a_2 - \lambda_1 b_1/b_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a_2/b_1\rangle - \lambda_1 \|b_1\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\langle a_2/b_1\rangle}{\|b_1\|^2}$ donc $b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2/b_1\rangle}{\|b_1\|^2} b_1$

Par récurrence : On suppose construit $(b_1, \ldots, b_{k-1})$ une famille orthogonale tq $\langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle = \langle a_1, \ldots, a_{k-1}\rangle$.

Soit $z = a_k - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \cdots - \lambda_{k-1} b_{k-1}$. Cherchons λ_j pour $j \in [\![1, k-1]\!]$ tq $\langle z/b_j\rangle = 0$. D'où $\langle z/b_j\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a_k - \lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2 - \cdots - \lambda_{k-1} b_{k-1}/b_j\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a_k/b_j\rangle - \lambda_j \|b_j\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = \frac{\langle a_k/b_j\rangle}{\|b_j\|^2}$ d'où $b_k = a_k - \frac{\langle a_k/b_j\rangle}{\|b_j\|^2} b_j$.

Exemple : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur $E \times E \quad \langle P/Q\rangle = P(1)\, Q(1) + P(0)\, Q(0) + P(-1)\, Q(-1)$.

1. Montrer que $\langle \cdot / \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E \times E$.
2. Trouver une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) de E vérifiant $\deg P_i = i$.

1.
   - $\langle \cdot / \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique `À DÉMONTRER`.
   - $\forall\, P \in E \quad \langle P/P\rangle = P(1)^2 + P(0)^2 + P(-1)^2 \geqslant 0$
   - $\forall\, P \in E \quad \langle P/P\rangle = 0 \Leftrightarrow P(1)^2 + P(0)^2 + P(-1)^2 = 0 \Rightarrow P(1) = P(0) = P(-1) = 0 \Leftrightarrow P = (0)$ car P est un polynôme non nul de degré $\leqslant 2$ à au plus 2 racines.

   Conclusion : $\langle \cdot / \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E \times E$.

2. On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique $\left(1, X, X^2\right)$. Petit décalage d'incide...
$P_1 = 1$; $P_2 = X - \frac{\langle X/P_1\rangle}{\|P_1\|^2} P_1 = X - \frac{\langle X/1\rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 = X - \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + -1\cdot 1}{1+1+1} \cdot 1 = X$; $P_3 = X^2 - \frac{\langle X^2/P_2\rangle}{\|P_2\|^2} P_2 - \frac{\langle X^2/P_1\rangle}{\|P_1\|^2} P_1 = X^2 - \frac{2}{3}$ donc $\left(1, X, X^2 - \frac{2}{3}\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

I.6. Projections et symétriques orthogonales

Def : Soit E un espace préhilbertien et F et G deux sous espaces vectoriels de E supplémentaires dans E.
$\forall x \in E \quad \exists! \,(x', x'') \in F \times G \;$ tq $\; x = x' + x''$.

- L'appliction $p\colon \begin{array}{c} E \longrightarrow E \\ x \mapsto x' \end{array}$ est un projecteur sur F parallèlement à G.
- L'application $S\colon \begin{array}{c} E \longrightarrow E \\ x \mapsto 2\,P(x) - x \end{array}$ est une symétrie par rapport à F parallèlement à G.
- On a $S = 2\,p - e$ avec e l'application identité de E.

Propriétés : Soit p un projecteur sur F // à G et S une symétrie par rapport à F // à G, alors :

1. $p^2 = p \quad (p^2 = p \circ p)$
2. $\operatorname{Ker} p = G$ et $\operatorname{Im} p = F \qquad \left(E = F \oplus G \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p\right)$
3. $\forall x \in E \quad x = p(x) + x - p(x)$ avec $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ car $p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p(x) = 0$
4. $e - p$ est un projecteur
5. $S = 2\,p - e \Rightarrow S^2 = e$ et $\forall x \in E \quad x = x' + x''$ alors $S(x) = S(x' + x'') = x' - x''$

Démo :

1. On a $\forall x \in E \quad x = x' + x''$ avec $x' \in F$ et $x'' \in G$.
$P(x) = x'$, or $x' \in E$ et $x' = \underset{\in F}{x'} + \underset{\in G}{0} \Rightarrow p(x') = x'$ d'où $p(p(x)) = p(x) \Rightarrow p^2 = p$.
2. • On a $p(x) = x' \in F \Rightarrow \operatorname{Im} p \subset F$, d'autre part $\forall x \in F$ on a $x = \underset{\in F}{x} + \underset{\in G}{0} \Rightarrow p(x) = x \Rightarrow x \in \operatorname{Im} p \Rightarrow F \subset \operatorname{Im} p$ donc $\operatorname{Im} p = F$.
• $\forall x \in G$ on a $x = \underset{\in F}{0} + \underset{\in G}{x} \Rightarrow p(x) = 0 \Rightarrow G \subset \operatorname{Ker} p$. D'autre part $\forall x \in E \quad x = \underset{\in F}{x'} + \underset{\in G}{x''} \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow x = x'' \Leftrightarrow x \in G$ donc $\operatorname{Ker} p \subset G$ d'où $\operatorname{Ker} p = G$.
3.
4. $(e - p)^2 = e + p^2 - 2\,p = e + p - 2\,p = e - p \Rightarrow e - p$ est un projecteur
5. $S^2 = (2\,p - e)^2 = 4\,p^2 - 4\,p + e = e. \quad \forall x \in E \quad x = \underset{\in F}{x'} + \underset{\in G}{x''} \quad S(x' + x'') = S(x') + S(x'') = (2\,p - e)(x') + (2\,p - e)(x'') = 2\,p(x') - e(x') + 2\,p(x'') - e(x'') = 2\,x' - x' + 0 - x'' = x' - x''$

Def : Projecteur orthogonal et symétrie orthogonale
Étant donné un projecteur p de E.

i. Si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux (sachant que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$), alors p s'appelle projecteur orthogonal.
ii. Une symétrie S de E est dite orthogonale lorsque le projecteur associé $p = \frac{1}{2}(S + e)$ est orthogonal.

Conséquence : À une décomposition de E en somme directe orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$, on peut associer :
p_F : projecteur orthogonal d'image F et de noyau $F^{\perp}$
$p_{F^{\perp}}$: projecteur orthogonal d'image $F^{\perp}$ et de noyau F
S_F : symétrie orthogonale par rapport à F : $S_F = 2\,p_F - e$
$S_{F^{\perp}}$: symétrie orthogonale par rapport à $F^{\perp}$: $S_{F^{\perp}} = 2\,p_{F^{\perp}} - e$

Propriétés : Soit p un projecteur orthogonal. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. p est un projecteur orthogonal
ii. $\forall x, y \in E \quad \langle p(x)/y\rangle = \langle x/p(y)\rangle$
iii. $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$

Démo :

i. $i \Rightarrow ii$
On suppose que p est un projecteur orthogonal de $E \Rightarrow E = \operatorname{Im}\, p \oplus \operatorname{Ker}\, p$ et $(\operatorname{Ker}\, p)^{\perp} = \operatorname{Im}\, p$ et $(\operatorname{Im}\, p)^{\perp} = \operatorname{Ker} p$.
$\langle x/p(y)\rangle = \langle x - p(x) + p(x)/p(y)\rangle = \langle \underset{\in \operatorname{Ker} p}{x - p(x)}/\underset{\in \operatorname{Im} p}{p(y)}\rangle + \langle p(x)/p(y)\rangle = \langle p(x)/p(y)\rangle$ car $(p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0)$. De même $\langle p(x)/y\rangle = \langle \underset{\in \operatorname{Im} p}{p(x)}/\underset{\in \operatorname{Ker} p}{y - p(y)}\rangle + \langle p(x)/p(y)\rangle = \langle p(x)/p(y)\rangle \Rightarrow \langle x/p(y)\rangle = \langle p(x)/y\rangle$.

ii. $ii \Rightarrow iii$
On applique $ii)$ avec $y = p(x)$ d'où $\langle p(x)/p(x)\rangle \leqslant \langle x \,/\, p^2(x)\rangle \Rightarrow \underbrace{\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|\,\|p(x)\|}_{\text{Inégalité de Schwarz}} \Rightarrow \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ si $p(x) \neq 0$ et si $p(x) = 0$ alors l'inégalité de $iii)$ est encore valable.

iii. $iii \Rightarrow i$
Supposons que p ne soit pas orthogonal alors il existent $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$ tq $\langle x/y\rangle \neq 0$ (avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$).
Soit $\lambda = -\frac{\langle y/x\rangle}{\|y\|^2}$ alors $\langle y/x + \lambda\, y\rangle = \langle y/x\rangle + \lambda\,\langle y/y\rangle = \langle y/x\rangle - \frac{\langle y/x\rangle}{\|y\|^2}\,\|y\|^2 = 0$.
D'autre part $x = x + \lambda\, y - \lambda\, y \Rightarrow \|x\|^2 = \|x + \lambda\, y\|^2 + \|\lambda\, y\|^2 + 0 \Rightarrow \|x\|^2 \geqslant \|x + \lambda\, y\|^2 \Rightarrow \|x\| \geqslant \|x + \lambda\, y\|$ (*)
Or $p(x + \lambda\, y) = p(x) + \lambda\, p(y) = p(x) = x$ car $x \in \operatorname{Im} p$ et car $y \in \operatorname{Ker} p$.
(*) $\|p(x + \lambda\, y)\| \geqslant \|x + \lambda\, y\|$ en contradiction avec $iii)$

Propriétés : Soit S une symétrie orthogonale. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. S est une symétrie orthogonale
ii. $\forall\, x, y \in E \quad \langle x/S(y)\rangle = \langle S(x)/y\rangle$
iii. $\forall\, x \in E \quad \|S(x)\| = \|x\|$

Démo :

i. $i \Rightarrow ii$
Soit p le projecteur orthogonal associé à $S \Rightarrow S = 2\,p - e$. Puisque p est orthogonal alors on sait que $\forall\, x, y \in E \quad \langle x/p(y)\rangle = \langle p(x)/y\rangle$. Or $\langle x/S(y)\rangle = \langle x/(2\,p - e)(y)\rangle = \langle x \,/\, 2p(y)\rangle - \langle x/y\rangle = 2\,\langle p(x)/y\rangle - \langle x/y\rangle = \langle (2\,p - e)(x) \,/\, y\rangle = \langle S(x)/y\rangle$

ii. $ii \Rightarrow iii$
On applique ii avec $y = S(x)$ d'où $\langle x \,/\, S^2(x)\rangle = \langle S(x) \,/\, S(x)\rangle \Rightarrow \langle x/x\rangle = \langle S(x)/S(x)\rangle \Rightarrow \|x\|^2 = \|S(x)\|^2 \Rightarrow \|x\| = \|S(x)\|$

iii. $iii \Rightarrow i$
Supposons que S ne soit pas orthogonale, alors $\exists\, x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$ tq $\langle x/y\rangle \neq 0$ (avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$)
Soit $\lambda = -\frac{\langle y/x\rangle}{\|y\|^2}$ alors $\langle y/x + \lambda\, y\rangle = 0$.
Or $x - \lambda\, y = x + \lambda\, y - 2\,\lambda\, y \Rightarrow \|x - \lambda\, y\|^2 = \|x + \lambda\, y\|^2 + 4\,\lambda^2\,\|y\|^2 \Rightarrow \|x - \lambda\, y\| \neq \|x + \lambda\, y\|$. (**)
Mais $S(x + \lambda\, y) = S(x) + \lambda\, S(y) = 2\,p(x) - x + \lambda\,(2\,p(y) - y) = 2\,x - x - \lambda\, y = x - \lambda\, y$
(**) $\Rightarrow \|S(x + \lambda\, y)\| \neq \|x + \lambda\, y\|$ en contradiction avec iii.

Def : On appelle distance d'un vecteur x de E à une partie non vide A de E le réel $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$

Théorème : Soit x un vecteur de E et F un sous espace vectoriel de E

i. L'ensemble $\{y \in F \;\;/\;\; d(y, F) = \|x - y\|\}$ a au plus un élément
ii. Soit $x_0 \in F$ vérifiant $d(x, F) = \|x - x_0\| \Leftrightarrow x - x_0 \in F^{\perp}$
iii. Si F admet un supplémentaire orthogonal on a $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^{\perp}}(x)\|$

Démo :

i. Si y et z sont deux vecteurs de F réalisant $\|x - y\| = \|x - z\| = d(x, F)$, alors l'identité du parallélogramme appliqué à $x - y$ et $x - z$ donne : $\|x - y + x - z\|^2 + \|x - y - (x - z)\|^2 = 2\,\|x - y\|^2 + 2\,\|x - z\|^2$ c'est à dire $\|2\,x - y - z\|^2 + \|y - z\|^2 = 2\,\|x - y\|^2 + 2\,\|x - z\|^2 \Rightarrow \|y - z\|^2 = 4\,d^2(x, F) - 4\,\left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2 \Rightarrow \|y - z\|^2 = 4\,d^2(x, F) - 4\,\left\|x - \underbrace{\frac{y+z}{2}}_{\in F}\right\|^2 \leqslant 0 \Rightarrow \|y - z\|^2 = 0 \Rightarrow y = z$.

ii. **$\Leftarrow$:** Supposons $x - x_0 \in F^{\perp}$ alors $y \in F$ on a $\langle y/x - x_0\rangle = 0$
D'après Pythagore $\|x - x_0 + x_0 - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2$ car $x - x_0 \in F^{\perp}$ et $x_0 - y \in F$. $\Rightarrow \|x - y\|^2 \geqslant \|x - x_0\|^2$. On vient de montrer que $\forall\, y \in F \quad \|x - y\| \geqslant \|x - x_0\| \Rightarrow \|x - x_0\| = \inf\limits_{y \in F} \|y - x\|$ c'est à dire $d(x, F) = \|x - x_0\|$.
$\Rightarrow$: Supposons $d(x, F) = \|x - x_0\|$.
Si $x - x_0 \notin F^{\perp}$ alors il existerait $y \in F, y \neq 0$ tq $\langle x - x_0/y\rangle \neq 0$. En prenant $\lambda = \frac{\langle y/x - x_0\rangle}{\|y\|^2}$ alors on a facilement $\langle y/x - x_0 - \lambda\, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x - x_0 - \lambda\, y/\lambda\, y\rangle = 0$. On utilise Pythagore $\Rightarrow \|x - x_0 - \lambda\, y + \lambda\, y\|^2 = \|x - x_0 - \lambda\, y\|^2 + \lambda^2\,\|y\|^2$ c'est à dire $\Rightarrow \|x - \underbrace{(x_0 + \lambda\, y)}_{\in F}\| < \|x - x_0\|$ car $\lambda \neq 0$. Ceci est impossible car $\|x - x_0\| = \inf\{\|x - y\|$ lorsque y décrit $F\}$, donc $x - x_0 \in F^{\perp}$

iii. On a $E = F \oplus F^{\perp} \Rightarrow \forall\, x \in E \quad \exists!\,(x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$ tq $x = x_1 + x_2$ et $x_1 = p_F(x)$ et $x_2 = p_{F^{\perp}}(x) \Rightarrow x = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)$.
Pour cela il suffit de montrer que $\forall\, y \in F \quad \|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$. En effet $\forall\, y \in F \quad \|x - y\|^2 = \|\underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}\|^2 \Rightarrow \|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\| \Rightarrow p_F(x)$ réalise $d(x, F)$.

Exemple d'application :

Soit a un vecteur non nul de E. On note $D=\mathbb{R}\,a$ et H l'hyperplan orthogonal à a. Calculer $d(x,D)$ et $d(x,H)$ en fonction de $\|x\|$ et $\langle a/x\rangle$.

On sait que $E=D\oplus H\Leftrightarrow E=\mathbb{R}\,a\oplus(\mathbb{R}\,a)^{\perp}$. $\forall\, x\in E\quad x=x_1+x_2$ avec $x_1\in D$ et $x_2\in H$. On sait que $p_D(x)=x_1$ et $p_H(x)=x_2$. $x_1=\frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2}\,a$; $x_2=x-\frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2}\,a$. `À retenir :` $x_2\in(\mathbb{R}\,a)^2$ `ssi` $x_2=x-\frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2}\,a$

Donc $p_D(x)=\frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2}\,a$ et $p_H(x)=x-\frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2}\,a$. D'où $d(x,H)=\|x-p_H(x)\|=\left\|x-x+\frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2}\,a\right\|=\frac{|\langle a/x\rangle|}{\|a\|}$ et $d(x,D)=\|x-p_D(x)\|=\|x-\frac{\langle a/x\rangle}{\|a\|^2}\,a\|=\|p_H(x)\|$.

D'après Pythagore $\|x\|^2=\|p_D(x)\|^2+\|p_H(x)\|^2\Rightarrow\|p_H(x)\|^2=\|x\|^2-\frac{\langle a/x\rangle^2}{\|a\|^4}\,\|a\|^2=\|x\|^2-\frac{\langle a/x\rangle^2}{\|a\|^2}$. D'uù $d^2(x,D)=\|x\|^2-\frac{\langle a/x\rangle^2}{\|a\|^2}$

II. Espaces Euclidiens

Def : On appelle espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie n, non nulle.

Def : On appelle matrice du produit scalaire dans un base $B=(e_1,\ldots,e_n)$, la matrice $G_B=\big(\langle e_i/e_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque : La matrice précédente est symétrique, elle donne l'expression du produit scalaire dans la base B.
En effet $X={}^t(x_1,\ldots,x_n), Y={}^t(y_1,\ldots,y_n),\quad \langle x/y\rangle={}^tX\,G_B\,Y=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\,y_j\,\langle e_i/e_j\rangle$
Si p est la matrice de passage de la base B à une autre base B' de E alors on a la relation $G_{B'}={}^tPG_B\,P$

II.1. Bases orthonormales

Soit $B=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, soit $x\in E$, $x=\sum_{i=1}^n x_i\,e_i$ et $X={}^t(x_1\cdots x_n)$. On note $G_B=\big(\langle e_i/e_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice du produit scalaire dans la base B.

L'étude faite au paragraphe I nous donne les propriétés suivantes :

1. Pour tout sous espace F d'un espce euclidien on a : $E=F\oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp^{\perp}}=F$
2. Un espace euclidien admet au moins une base orthonormale.
   Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.
3. Soit $B=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a. B est orthonormale
   b. $G_B=I_n$
   c. $\forall\, x,y\in E\quad \langle x/y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\,y_i={}^tX\,Y$
   d. $\forall\, x\in E\quad \|x\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2={}^tX\,X$
4. Si $B=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormale de E, alors $\forall\, x\in E\quad x=\sum_{i=1}^n\langle x/e_i\rangle\,e_i$, c'est à dire $\forall\, x\in E$, $\forall\, i\in[\![1,n]\!]\quad x_i=\langle x/e_i\rangle$. En effet, soit $x\in E\quad x=\sum_{i=1}^n x_i\,e_i\Rightarrow\langle x/e_i\rangle=\big\langle\sum_{i=1}^n x_i\,e_i/e_i\big\rangle=x_i\,\langle e_i/e_i\rangle=x_i$
5. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n, on munit E d'une structure d'espace euclidien en considérant une base B de E comme une base orthonormale, le produit scalaire est alors donné par $\langle x/y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\,y_i$.
   La situation précédente appliquée à $E=\mathbb{R}^n$, B la base canonique de $\mathbb{R}^n$ confère à $\mathbb{R}^n$ une structure euclidienne dite canonique.

II.2. Endomorphisme remarquables d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

Def : Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, on dit que f admet un adjoint ssi il existe $f^*\in\mathcal{L}(E)$ tq $\forall\, x,y\in E\quad\big\langle f(x)/y\big\rangle=\big\langle x/f^*(y)\big\rangle$
f^* est appelé adjoint de f. `On l'a déjà vu avec les projecteurs, donc` $p^*=p$

Théorème : Si f admet un adjoint, alors cet adjoint est unique.

Démo :

Soit $f_1^*, f_2^*\in\mathcal{L}(E)$ deux adjoints de f, on a alors $\forall\, x,y\in E\quad\big\langle f(x)/y\big\rangle=\big\langle x/f_1^*(y)\big\rangle=\big\langle x/f_2^*(y)\big\rangle\Rightarrow\forall\, x,y\in E\quad\big\langle x/f_1^*(y)\big\rangle-\big\langle x/f_2^*(y)\big\rangle=0\Rightarrow\forall\, x,y\in E\quad\big\langle x/f_1^*(y)-f_2^*(y)\big\rangle=0\Rightarrow f_1^*(y)-f_2^*(y)\in E^{\perp}$ or $E^{\perp}=\{0\}$ car le produit scalaire est une forme définie, donc $\forall\, y\in E\quad f_1^*(y)-f_2^*(y)=0\Rightarrow f_1^*=f_2^*$

Propriété : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ admettant des adjoints. Alors :

1. $\lambda f + g$ admet un adjoint et $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$
2. $\mathrm{Id}_E \equiv e$ admet un adjoint et $e^* = e$
3. $g \circ f$ admet un adjoint et $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \Rightarrow \left(f^{-1}\right)^* = (f^*)^{-1}$
4. f^* admet un adjoint et $(f^*)^* = f$

Démo : $\forall\, x, y \in E$

1. $\left\langle (\lambda f + g)(x) / y \right\rangle = \lambda \langle f(x)/y \rangle + \langle g(x)/y \rangle = \lambda \left\langle x / f^*(y) \right\rangle + \left\langle x / g^*(y) \right\rangle = \left\langle x / \lambda f^*(y) + g^*(y) \right\rangle = \left\langle x / (\lambda f + g)(y) \right\rangle \Rightarrow (\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$
2. $\langle e(x)/y \rangle = \langle x/e(y) \rangle \Rightarrow e^* = e$
3. $\left\langle (g \circ f)(x) / y \right\rangle = \left\langle g\big(f(x)\big) \Big/ y \right\rangle = \left\langle f(x) / g^*(y) \right\rangle = \left\langle x \Big/ f^*\big(g^*(y)\big) \right\rangle = \left\langle x / (f^* \circ g^*)(y) \right\rangle \Rightarrow (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
   De plus $f \circ f^{-1} = e \Rightarrow \left(f \circ f^{-1}\right)^* = e^* \Rightarrow \left(f^{-1}\right)^* \circ f^* = e \Rightarrow (f^*)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$
4. $\left\langle f^*(x) / y \right\rangle = \left\langle y / f^*(x) \right\rangle = \left\langle f(y) / x \right\rangle = \left\langle x / f(y) \right\rangle$ car le produit scalaire est symétrique et par la définition de l'adjoint (prise à l'envers) $\Rightarrow (f^*)^* = f$

Propriété : Image et noyau de l'adjoint : Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ $\quad \mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$

Démo :

On a $\mathrm{Ker}\, f^* = \{y \in E \ / \ f^*(y) = 0\} = \Big\{y \in E \ / \ \forall\, x \in E \quad \left\langle f^*(y)/x \right\rangle = 0\Big\} = \Big\{y \in E \ / \ \forall\, x \in E \quad \left\langle y / f(x) \right\rangle = 0\Big\}$. Or $(\mathrm{Im}\, f)^\perp = \Big\{y \in E \ / \ \forall\, x \in E \quad \left\langle f(x)/y \right\rangle = 0\Big\} = \Big\{y \in E \ / \ \forall\, x \in E \quad \left\langle y / f(x) \right\rangle = 0\Big\} \Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$. Mais on a une définition symétrique par rapport à f et f^* d'où $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f^*)^\perp \Rightarrow$ $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = \left((\mathrm{Im}\, f^*)^\perp\right)^\perp = \mathrm{Im}\, f^*$

Propriété : Matrice de l'adjoint *dans une base orthonormale*

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. On pose $\mathcal{M}_e(f) = A$; $\mathcal{M}_e(f^*) = A^*$. Alors $A^* = {}^tA$

Démo : f^* adjoint de $f \Leftrightarrow \forall\, x, y \in E \quad \langle f(x)/y \rangle = \left\langle x / f^*(y) \right\rangle \Leftrightarrow \forall\, X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^t\!\left(A X\right) I_n Y = {}^tX\, I_n\, A\, Y \Leftrightarrow \forall\, X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX\, {}^tA\, Y = {}^tX\, A^*\, Y \Leftrightarrow A^* = {}^tA$

Conséquence : Un endomorphisme et son adjoint ont le même polynôme caractéristique donc si l'un est diagonalisable, l'autre l'est également.

Def : automorphisme : morphisme de E dans E, bijectif

1. Un automorphisme F de E est dit orthogonal ssi $f^* = f^{-1}$ c'est à dire $\forall\, x, y \in E \quad \left\langle f(x)/y \right\rangle = \left\langle x / f^{-1}(y) \right\rangle$
2. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit :
   - symétrique ssi $f^* = f$, c'est à dire $\forall\, x, y \in E \quad \left\langle f(x)/y \right\rangle = \left\langle x / f(y) \right\rangle$
   - antisymétrique ssi $f^* = -f$, c'est à dire $\forall\, x, y \in E \quad \left\langle f(x)/y \right\rangle = -\left\langle x / f(y) \right\rangle$

Théorème :

1. Si F est un sous espace de E stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^*
2. Si F est un sous espace de E stable par f^* alors $F^\perp$ est stable par f

Démo : F est stable pour $f \Leftrightarrow \forall\, x \in F \quad f(x) \in F$

1. $F^\perp = \{y \in E \ / \ \forall\, x \in F \quad \langle x/y \rangle = 0\}$. On a $\forall\, x, y \in E \quad \left\langle f(x)/y \right\rangle = \left\langle x / f^*(y) \right\rangle$.
   Soit $y \in F^\perp$ alors $\forall\, x \in F \quad \langle y/x \rangle = 0$, de plus $\left\langle x / f^*(y) \right\rangle = \left\langle f(x)/y \right\rangle$. Or $x \in F \Rightarrow f(x) \in F \Rightarrow \left\langle f(x)/y \right\rangle = 0$ car $y \in F^\perp \Rightarrow \left\langle x / f^*(y) \right\rangle = 0$, pour tout $x \in F \Rightarrow f^*(y) \in F^\perp \Rightarrow F^\perp$ est stable par f^*.
2. Si F est stable par f^* alors d'après 1°) $F^\perp$ est stable par $(f^*)^* = f$.

II.3. Groupe orthogonal d'un espace euclidien

f est un automorphisme orthogonal ssi $f^* = f^{-1}$, c'est à dire $\forall\, x, y \in E \quad \left\langle f(x)/y \right\rangle = \left\langle x / f^{-1}(y) \right\rangle$

Propriété : L'ensemble des automorphisme orthogonaux est un sous groupe du groupe $\mathrm{GL}(E)$ (groupe des endomorphisme inversibles de E). On le note $O(E)$.

Théorème : Le déterminant d'un endomorphisme orthogonal (et donc d'une matrice orthogonale ${}^tA = A^{-1}$) vaut ± 1.

Démo : On a $f^* = f^{-1} \Rightarrow$ dans une base e orthonormale de E on a : $\mathcal{M}_e(f) \equiv A$ et $\mathcal{M}_e(f^*) = {}^tA$. De plus on a $f^* = f^{-1} \Rightarrow \mathcal{M}_e(f^*) = \mathcal{M}_e(f^{-1})$ c'est à dire ${}^tA = A^{-1} \Rightarrow {}^tA\, A^{-1} = I \Rightarrow \det {}^tA \det A = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$

II.3.1. Caractérisation des automorphisme orthogonaux

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E espace euclidien. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, x, y \in E \quad \big\langle f(x) / f(y) \big\rangle = \langle x / y \rangle$. On dit que f conserve le produit scalaire.
2. $\forall\, x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$. On dit que f conserve la norme.
3. $f \in O(E)$.

Démo :

$1 \Rightarrow 2$: Prendre $x = y$

$2 \Rightarrow 1$: $\forall\, x, y \in E \quad \langle f(x) / f(y) \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2 \Big) = \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \big) = \langle x / y \rangle$

$1 \Rightarrow 3$: Si f vérifie 1°) alors f vérifie 2°). Soit $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f$ est injective $\Rightarrow f$ est bijective car E est de dimension finie.

On a alors $\forall\, x, y \in E \quad \big\langle f(x) / y \big\rangle = \Big\langle f(x) \Big/ f\big(f^{-1}(y)\big) \Big\rangle = \big\langle x / f^{-1}(y) \big\rangle$ c'est à dire $\forall\, x, y \in E \quad \langle f(x) / y \rangle = \big\langle x / f^{-1}(y) \big\rangle \Rightarrow f^* = f^{-1}$ donc $f \in O(E)$.

$3 \Rightarrow 1$: Si $f \in O(E)$ on a $\forall\, x, y \in E \quad \big\langle f(x) / f(y) \big\rangle = \Big\langle x \Big/ f^*\big(f(y)\big) \Big\rangle = \Big\langle x \Big/ f^{-1}\big(f(y)\big) \Big\rangle = \langle x / y \rangle$

Théorème :

1. Un endomorphisme f est orthogonal ssi l'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale.
2. Un endomorphisme f est orthogonal ssi sa matrice M dans une base orthonormale B de E vérifie ${}^tM\, M = I$

Démo :

1. Supposons f orthogonal. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. La conservation du produit scalaire $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!] \quad \big\langle f(e_i) / f(e_j) \big\rangle = \langle e_i / e_j \rangle = \delta_{ij}$
2. On sait que $\forall\, x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\| \Rightarrow \big\langle f(x) / f(x) \big\rangle = \langle x / x \rangle \Rightarrow {}^t(M\,X)\,(M\,X) = {}^tX\,X \Rightarrow {}^tX\,{}^tM\,M\,X = {}^tX\,X \Rightarrow {}^tM\,M = I$

Théorème : Les seules valeurs propres *réelles* de f automorphisme orthogonal sont 1 et -1.
Les sous espaces propres de f sont orthogonaux.

Démo :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ valeur propre de f ssi $\exists\, x \neq 0$, $x \in E$ tq $f(x) = \lambda\, x$. La conservation de la norme donne $\|f(x)\| = \|\lambda\, x\| \Rightarrow \|x\| = \|\lambda\, x\| \Rightarrow \|x\|\,(1 - |\lambda|) = 0 \Rightarrow 1 - |\lambda| = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ car $x \neq 0$.

Supposons que 1 et -1 sont valeurs propres de f, les sous espaces propres associés sont $\operatorname{Ker}(f - e)$ et $\operatorname{Ker}(f + e)$. $\forall\, (x, y) \in \operatorname{Ker}(f - e) \times \operatorname{Ker}(f + e)$ on sait que $\big\langle f(x) / f(y) \big\rangle = \langle x / y \rangle$ or $(f - e)(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x$ et $(f + e)(y) = 0 \Rightarrow f(y) = -y$ donc on a $\langle x / -y \rangle = \langle x / y \rangle \Rightarrow 2 \langle x / y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x / y \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}(f - e)$ et $\operatorname{Ker}(f + e)$ sont orthogonaux.

II.3.2. Matrices orthogonales

Def : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^tM\, M = I$

Propriétés :

1. Le spectre de $M \subset \{-1, 1\}$
2. Le $\det M = \pm 1$
3. Le système des vecteurs colonnes (respectivement lignes) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

II.4. Endomorphismes symétriques et antisymétriques

Propriétés : Une application $f : E \to E$ est un endomorphisme symétrique (respectivement antisymétrique) ssi
$\forall\, x, y \in E \quad \big\langle f(x) / y \big\rangle = \big\langle x / f(y) \big\rangle$ (respectivement $\langle f(x) / y \rangle = -\big\langle x / f(y) \big\rangle$)

Démo : Vérifions que cette relation assure la linéarité de f

$\forall\, \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, $\forall\, x, x', y \in E \quad \big\langle f(\alpha\, x + \alpha'\, x') / y \big\rangle = \big\langle \alpha\, x + \alpha'\, x' / f(y) \big\rangle = \alpha\, \langle x / f(y) \rangle + \alpha'\, \langle x' / f(y) \rangle = \alpha \big\langle f(x) / y \big\rangle + \alpha' \big\langle f(x') / y \big\rangle = \big\langle \alpha\, f(x) + \alpha'\, f(x') / y \big\rangle \Rightarrow \forall\, y \in E \quad \big\langle f(\alpha\, x + \alpha'\, x') - \alpha\, f(x) - \alpha'\, f(x') / y \big\rangle = 0 \Rightarrow f(\alpha\, x + \alpha'\, x) - \alpha\, f(x) - \alpha'\, f(x') = 0 \Rightarrow$ la linéarité de f.

Propriété : *Caractérisation matricielle*

L'endomorphisme f est symétrique (respectivement antisymétrique) ssi sa matrice dans une base orthonormale est symétrique (respectivement antisymétrique).

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphisme symétrique et $\mathcal{A}(E)$ des endomorphismes antisymétriques sont des sous espaces supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$. En effet $\forall f \in \mathcal{L}(E)$ on a $f = s + a$ avec $s = \frac{f + f^*}{2} \in \mathcal{S}(E)$ et $a = \frac{f - f^*}{2} \in \mathcal{A}(E)$. `Remarque :` $a^* = \frac{f^* - f^{**}}{2} = -\frac{f - f^*}{2} = -a \Rightarrow a$ `est antisymétrique`

Soit $g \subset \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) \Rightarrow \begin{cases} g^* = g \\ g^* = -g \end{cases} \Rightarrow g = 0$ d'où $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$.

Propriétés des endomorphismes antisymétriques :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; $f \in \mathcal{A}(E)$ ssi $\forall x \in E \quad \langle f(x)/x \rangle = 0$.
2. Pour $f \in \mathcal{A}(E)$, 0 est la seule valeur propre éventuelle de f.
3. L'image et le noyau de f antisymétrique sont supplémentaires orthogonaux.
4. Si F est un sous espace de E stable par $f \in \mathcal{A}(E)$ alors $F^\perp$ est stable par f.
5. Si f est antisymétrique alors $f \circ f$ est symétrique.

Démo :

1. On a $\forall x, y \in E \quad \langle f(x)/y \rangle = -\langle x/f(y) \rangle$ (f antisymétrique). Si $y = x$ alors $\langle f(x)/x \rangle = -\langle x/f(x) \rangle \Rightarrow 2\langle f(x)/x \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x)/x \rangle = 0$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de $f \Rightarrow \exists\, x \neq \mathbf{0}$; $x \in E$ tq $f(x) = \lambda x$ or $\langle f(x)/x \rangle = 0 \Rightarrow \langle \lambda x/x \rangle = 0 \Rightarrow \lambda \|x\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ car $x \neq 0$.
3. On a $f^* = -f$. On sait que $\underbrace{\operatorname{Ker} f^*}_{=\operatorname{Ker}(-f) = \operatorname{Ker} f} = (\operatorname{Im} f)^\perp$. Or $E = \operatorname{Im} f \oplus (\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Propriétés des endomorphismes symétriques :

1. L'image et le noyau de f sont supplémentaires orthogonaux.
2. Les sous espaces propres de f sont en somme directe orthogonale.

Démo :

1. Même démo que le 3. des propriétés des endomorphismes antisymétriques
2. Soit x et y deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes λ et μ. On a donc $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$. De l'égalité $\langle f(x)/y \rangle = \langle x/f(y) \rangle$ on a $\langle \lambda x/y \rangle = \langle x/\mu y \rangle \Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x/y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x/y \rangle = 0$ donc les sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
   On va montrer que f est diagonalisable $\Rightarrow$ la supplémentarité des sous espaces propres.

Propriété : Le polynôme caractéristique P_f d'un endomorphisme symétrique f est scindé et toutes les valeurs propres de f sont réelles.

Démo : `Si ça ne vous intéresse pas, on a trois portes dans l'amphi, c'est pour que vous puissiez sortir par celle qui vous paraît la plus proche.`

Soit B une base orthonormale de E et $M = \mathcal{M}_B(f)$; $f \in \mathcal{S}(E)$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons M comme étant une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ alors M a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{C}$. À une racine λ de P_M on associe $X = {}^t(x_1 \cdots x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0$ tq $MX = \lambda X$.

Considérons maintenant $\bar{X} = {}^t(\overline{x_1} \cdots \overline{x_n})$. On a la relation ${}^t\bar{X} M X = {}^t\bar{X} \lambda X = \lambda\, {}^t\bar{X} X$. « On transpose et on conjugue » : ${}^t\left[{}^t\bar{X} M X\right] = {}^t\left[\lambda\, {}^t\bar{X} X\right] \Leftrightarrow {}^tX\, {}^tM \bar{X} = \lambda\, {}^tX \bar{X} \Rightarrow \overline{{}^tX\, {}^tM \bar{X}} = \overline{\lambda\, {}^tX \bar{X}} \Rightarrow {}^t\bar{X}\, {}^t\bar{M} X = \bar{\lambda}\, {}^t\bar{X} X$ **(**)**

Comme M est réelle alors ${}^t\bar{M} = {}^tM = M$ (car M est symétrique). D'où **(**)** $\Rightarrow {}^t\bar{X} M X = \bar{\lambda}\, {}^t\bar{X} X \Rightarrow {}^t\bar{X} \lambda X = \bar{\lambda}\, {}^t\bar{X} X \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\, {}^t\bar{X} X = 0$ or ${}^t\bar{X} X = \sum_{i=1}^n x_i^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda$ est réel $\Rightarrow P_M$ est scindé **sur** $\mathbb{R}$.

Théorème fondamental : Tout endomorphisme symétrique f d'un espace euclidien E est diagonalisable.
Plus précisément, il existe une base prthonormal de E formée des vecteurs propres de f.

Démo par récurrence sur la dimension de E :
On sait que $f \in \mathcal{S}(E)$ admet au moins un vecteur propre qu'on note e_1 qu'on normalise. D'autre part on sait que $F = \langle e_1 \rangle$ est stable par f, donc $F^\perp$ est stable par $f^* = f$ $_{(f \text{ symétrique})}$ $\Rightarrow f$ induit sur $F^\perp$ un endomorphisme symétrique g. L'hypothèse de récurrence assure l'existance d'une base $(e_2, \ldots, e_n)$ de $F^\perp$ formée de vecteurs propres de g donc de f. On considère alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f.

Théorème : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique alors : C'est la traduction matricielle du théorème précédent.

- Son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
- Il existe une matrice P orthogonale telle que $P^{-1} M P$ soit diagonale.

Exercices

Exercice 1. Soit E un préhilbertien réel et $B=(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs normés de E. On suppose que $\forall\, x\in E,\ \|x\|^2=\sum_{i=1}^n \langle x/e_i\rangle^2$. Montrer que B est une base orthonormale de E.

Démonstration. Montrons que B est orthogonale :

Si $x=e_j$ alors $\|e_j\|^2=\sum_{i=1}^n \langle e_j/e_i\rangle^2=\langle e_j/e_i\rangle^2+\sum_{i\neq j}^{i=1\ldots n} \langle e_j/e_i\rangle \Rightarrow 1=1+\sum_{i\neq j}^{i=1\ldots n} \langle e_j/e_i\rangle^2 \Rightarrow \forall\, i,j\in\ldots\ldots$ $\square$