Formes bilinéaires symétriques, Formes quadratiques

I. Généralités

Def : On appelle forme bilinéaires sur $E\times E$ toute application $\varphi: E\times E\to\mathbb{K}$ telle que :

i. $\forall\,\alpha\in\mathbb{K},\ \forall\,x,x',y\in E\quad \varphi(\alpha\,x+x',y)=\alpha\,\varphi(x,y)+\varphi(x',y)$ (φ est linéaire par rapport à la 1ère place)

ii. $\forall\,\beta\in\mathbb{K},\ \forall\,x,y,y'\in E\quad \varphi(x,\beta\,y+y')=\beta\,\varphi(x,y)+\varphi(x,y')$ (φ est linéaire par rapport à la 2ème place)

Proposition : Soit φ une forme bilinéaire sur $E\times E$. Soit $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\ \beta_1,\dots,\beta_n\in\mathbb{K}$ et $x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_n\in E$ alors

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,x_i+\sum_{j=1}^{p}\beta_i\,y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\varphi\left(x_i,\ \sum_{j=1}^{p}\beta_i\,y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{j=1}^{p}\beta_j\,\varphi(x_i,y_j)=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\alpha_i\,\beta_i\,\varphi(x_i,y_i)$$

Def : Une application $\varphi: E\times E\to\mathbb{K}$ est dite symétrique ssi $\forall\,x,y\in E\quad\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.

Def : Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E\times E$.

On appelle forme quadratique associée à φ, l'application Φ de E dans $\mathbb{K}$ définie par $\forall x\in E\quad\Phi(x)=\varphi(x,x)$.

Exemple : Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ défini : $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\\ \big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big)\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i\end{array}$

alors la forme quadratique associée à f est définie par $\Phi:\begin{array}{l}\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\\ x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto\Phi(x)=f(x,x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\end{array}$

Propriétés :

1. $\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\,x\in E\quad\Phi(\lambda,x)=\varphi(\lambda\,x,\lambda\,x)=\lambda^2\,\varphi(x,x)=\lambda^2\,\Phi(x)$
2. $\forall\,x,y\in E\quad\begin{array}{l}\Phi(x+y)=\varphi(x+y,x+y)=\Phi(x)+2\,\varphi(x,y)+\Phi(y)\\ \Phi(x-y)=\varphi(x-y,x-y)=\Phi(x)-2\,\varphi(x,y)+\Phi(y)\end{array}$

   $\Rightarrow\Phi(x+y)-\Phi(x-y)=4\,\varphi(x,y)\Rightarrow\varphi(x,y)=\frac{1}{4}\Big(\Phi(x+y)-\Phi(x-y)\Big)$

   Donc étant donnée Φ forme quadratique sur E, elle provient d'une unique forme φ bilinéaire symétrique sur E. φ est appelée la forme polaire de Φ.

Interprétation matricielle On suppose que $\dim E=n$.

Def : Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E\times E$ et $B=(e_1,\dots e_n)$ une base de E.

On appelle matrice de φ dans (on dit aussi relativement à) B et on note $\mathcal{M}_B(\varphi)=\big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

Exemple : Considérons $E=\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B=(e_1,e_2)$; Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

et $\varphi:\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)\mapsto\alpha\,x_1\,x_2+\beta\,(x_1\,y_2+x_2\,y_1)+\gamma\,x_2\,y_2\end{array}$.

Il est clair que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ et on a : $\mathcal{M}_B(\varphi)=\begin{pmatrix}\varphi(e_1,e_1)&\varphi(e_1,e_2)\\ \varphi(e_2,e_1)&\varphi(e_2,e_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \beta&\gamma\end{pmatrix}$

Proposition : Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur $E\times E$, B une base de E, $B=(e_1,\dots,e_n)$, $A=\mathcal{M}_B(\varphi)$, et

$x=\sum_{i=1}^{n}x_i\,e_i$; $y=\sum_{i=1}^{n}y_i\,e_i$; On pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.

On a alors $\varphi(x,y)={}^tX\,A\,Y\in\mathcal{M}_{1,1}$: c'est un scalaire

Démo : En notant $B=(e_1,\dots,e_n)$ et $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

alors $\varphi(x,y)=\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\,e_i,\sum_{j=1}^{n}y_i\,e_i\Big)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_i\,y_i\,\varphi(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,y_i\big)$
or ${}^tX=(x_1,\dots,x_n)$ et $A\,Y={}^t\big(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\,y_j\ \cdots\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}\,y_j\big)$ donc $\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,y_j\big)={}^tX\,A\,Y$

Changement de bases Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ l'ancienne base de E, $X={}^t(\,x_1\ \cdots\ x_n\,)$, $B'=(e'_1,\dots,e'_n)$ la nouvelle base de E, $X'={}^t(\,x'_1\ \cdots\ x'_n\,)$ et P la matrice de passage de B à B'.
On sait que $X=PX'$, $Y=PY'$.

On pose $A = \mathcal{M}_B(\varphi)$; $A' = \mathcal{M}_{B'}(\varphi)$.

$\begin{array}{l}\varphi(x,y) = {}^tX\,A\,Y\\ \varphi(x,y) = {}^tX'\,A'\,Y'\end{array} \Rightarrow {}^tX\,A\,Y = {}^tX'\,A'\,Y'$, c'est à dire ${}^t(PX')\,A\,PY' = {}^tX\,A'\,Y' \Rightarrow {}^tX'\,{}^tP\,A\,P\,Y' = {}^tX'\,A'\,Y'$

$\boxed{\Rightarrow A' = {}^tP\,A\,P}$

II. Orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique

Def : Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, Φ la forme quadratique associée à φ.

Rappel : $\forall\, x, y \in E \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\Big(\Phi(x+y) - \Phi(x-y)\Big)$

1. Soit $x, y \in E$. On dit que x est orthogonal à y pour φ ssi $\varphi(x,y) = 0$.

2. Soit $x \in E$, A une partie de E. On dit que x est orthogonal à A pour φ ssi $\forall\, a \in A \quad \varphi(x,a) = 0$.

3. Pour toute partie A de E, on définir l'orthogonal de A pour φ, qu'on note $A^\perp$ $\big($ou $A^{\perp_\varphi}\big)$
   $A^\perp = \{x \in E \;\;/\;\; \forall\, a \in A \;\; \varphi(x,a) = 0\}$.

4. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale pour φ ssi $\forall\, i, j \in I, i \neq j \quad \varphi(x_i, x_j) = 0$.

Def : On appelle noyau d'une forme bilinéaire symétrique le sous espace de $E^\perp$ autrement dit :

$\operatorname{Ker}(\varphi) = E^\perp = \{x \in E \;\;/\;\; \forall\, y \in E \;\; \varphi(x,y) = 0\}$

Exemple :

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $E = \mathbb{R}^2 \quad \varphi\colon \begin{array}{c}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) \mapsto x_1\,y_1\end{array}$. Il est clair que φ est bilinéaire symétrique.

   $\operatorname{Ker}(\varphi) = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\;/\;\; \forall\; (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \;\;\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow x_1\,y_1 = 0\big\} = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\;/\;\; x_1 = 0\big\} = \{(0, x_2)\,;\, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_2\,(0,1)\,;\, x_2 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(0,1)$ c'est une droite vectorielle.

2. $E = \mathbb{C}^2 \;\;;\;\; \varphi(x,y) = x_1\,y_1 - x_2\,y_2$.

   $\operatorname{Ker}(\varphi) = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2 \;\;/\;\; \forall\; (y_1,y_2) \in \mathbb{C}^2 \quad x_1\,y_1 - x_2\,y_2 = 0\big\} = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2 \;\;/\;\;$ si $(y_1,y_2) = (1,0) \Rightarrow x_1 = 0$; si $(y_1,y_2) = (0,1) \Rightarrow x_2 = 0\big\} = \big\{(0,0)\big\}$

Def : On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ est non dégénérée ssi son noyau est réduit au vecteur nul.

Def :

1. Un vecteur x de E isotrope (pour Φ) ssi $\Phi(x) = 0$ (c'est à dire $\varphi(x,x) = 0$)

2. On appelle cône isotrope de Φ l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ.

3. Un sous espace vectoriel F de E est dit totalement isotrope ssi $F \subset F^\perp$

Exemple : Soit φ la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{C}^2$ par $\varphi(x,y) = x_1\,y_1 - x_2\,y_2$

On a montré que φ est non dégénérée car $\operatorname{Ker}\varphi = \big\{(0,0)\big\}$
x est isotrope $\Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm\, x_2$
d'où deux droites de vcteurs φ-isotropes engendrées par $(1,1)$ et $(1,-1)$.

On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ est définie ssi son seul vecteur isotrope est le vecteur nul.

Remarque : Si une forme bilinéaire symétrique φ est définie alors φ est non dégénérée. La réciproque est fausse en général.

Démo :

On a φ définie donc $\forall\, x \in E \quad \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Cherchons $\operatorname{Ker}\varphi$ — Rappel : $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E \,/\, \forall\, y \in E \;\; \varphi(x,y) = 0\}$
Si $x \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \forall\, y \in E \quad \varphi(x,y) = 0$. En particulier si $y = x$ alors $\varphi(x,x) = 0$. Or φ est définie $\Rightarrow x = 0$ donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ donc φ est non dégénérée.

Propriétés :

`Notation :` $\langle x\rangle \equiv \operatorname{Vect}(x)$

1. Soit A une partie de E espace vectoriel alors $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E. De plus $A^\perp = \langle A\rangle^\perp$

2. Soit A, B deux parties de E on a : $i)$ $A\subset B \Rightarrow A^{\perp}\supset B^{\perp}$
$ii) A\subset A^{\perp^{\perp}}$ (égalité dans E euclidien)

3. Pour tous sous espace vectoriel F et G de E on a : $a)$ $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}$
$b)$ $(F\cap G)^{\perp}\supset F^{\perp}+G^{\perp}$

4. Si $x\in E_1$ est un vecteur non isotrope, c'est à dire $x\neq 0$, et $\varphi(x,x)\neq 0$ alors $E=\langle x\rangle\oplus x^{\perp}$.
De plus $\forall\, y\in E \quad y-\frac{\varphi(y,x)}{\Phi(x)}x\in x^{\perp}$.

Démo : **Démo à apprendre, elle sera demandée en colle !**

`Vous êtes libre de discuter maintenant, mais je vous embêterai là dessus, je me vengerai !`

1. $\forall\, a\in A \quad \varphi(a,0)==\Rightarrow 0\in A^{\perp}\Rightarrow A^{\perp}\neq\varnothing$
$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{K},\ \forall\, x,y\in A^{\perp} \quad \alpha x+\beta y\in^{?} A^{\perp}$
$\forall\, a\in A \quad \varphi(\alpha x+\beta y,a)=\alpha\varphi(x,a)+\beta\varphi(y,a)=\alpha 0+\beta 0\Rightarrow \alpha x+\beta y\in A^{\perp}$
Donc $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E.

2. $i)$ On a $A\subset B$ et montrons que $A^{\perp}\supset B^{\perp}$:
Soit $y\in B^{\perp}$ donc $\forall\, b\in B \ \ \varphi(a,x)=0$ donc forcément $\forall\, a\in A$ (donc $a\in B$), $\varphi(y,a)=0\Rightarrow y\in A^{\perp}\Rightarrow B^{\perp}\subset A^{\perp}$
$ii)$Soit $a\in A$, comme $\forall\, x\in A^{\perp} \quad \varphi(a,x)=0$ donc $\forall\, x\in A^{\perp} \quad \varphi(x,a)=0\Rightarrow a\in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}\Rightarrow A\subset A^{\perp^{\perp}}$

3. $a)$ $\left.\begin{array}{l} F\subset F+G\Rightarrow F^{\perp}\supset(F+G)^{\perp}\\ G\subset F+G\Rightarrow G^{\perp}\supset(F+G)^{\perp}\end{array}\right\}\Rightarrow F^{\perp}\cap G^{\perp}\supset(F+G)^{\perp}$
Réciproquement si $x\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$ alors $\forall\, y\in F \ \ \varphi(x,y)=0$ et $\forall\, z\in G \ \ \varphi(x,z)=0$.
Pour tout $h\in F+G$ il existe $(y,z)\in F\times G$ tq $h=y+z$.
D'où $\varphi(h,x)=\varphi(y+z,x)=\varphi(y,x)+\varphi(z,x)=0+0=0\Rightarrow x\in(F+G)^{\perp}\Rightarrow F^{\perp}\cap G^{\perp}\subset(F+G)^{\perp}$
$\Rightarrow F^{\perp}\cap G^{\perp}=(F+G)^{\perp}$

$b)$ $\left\{\begin{array}{l} F\cap G\subset F\\ F\cap G\subset G\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(F\cap G)^{\perp}\supset F^{\perp}\\ (F\cap G)^{\perp}\supset G^{\perp}\end{array}\right.\Rightarrow(F\cap G)^{\perp}\supset F^{\perp}+G^{\perp}$

4. Soit $z\in\langle x\rangle\cap x^{\perp}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} z\in\langle x\rangle\\ z\in x^{\perp}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\exists\,\alpha\in\mathbb{K}\text{ tq } z=\alpha x\\ \varphi(z,x)=0\end{array}\right.\Rightarrow\varphi(\alpha x,x)=0\Rightarrow\alpha=0$ car $\varphi(x,x)\neq 0$ donc $z=0$ donc $\langle x\rangle\cap x^{\perp}=\{0\}$. $\quad\forall\, y\in E \ \ y=\frac{\varphi(y,x)}{\Phi(x)}x+y-\frac{\varphi(y,x)}{\Phi(x)}x$ or $\varphi\left(x,y-\frac{\varphi(y,x)}{\Phi(x)}x\right)=\varphi(x,y)-\frac{\varphi(y,x)}{\Phi(x)}\varphi(x,x)=0$
donc $y-\frac{\varphi(y,x)}{\Phi(x)}x\in x^{\perp}$.

II. Construction d'une base orthogonale

On suppose que $\dim E=n$

Remarque : Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

Si $\varphi(x,x)=0,\ \forall\, x\in E$ avec $\varphi\neq(0)$ alors $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2. C'est à dire que $1+1=0$ dans $\mathbb{K}$.

Démo :

$\varphi\neq(0)\Rightarrow\exists\, x_0,y_0\in E$ tq $\varphi(x_0,y_0)\neq 0$. Posons $\varphi(x_0,y_0)=\alpha\Rightarrow\varphi\left(\frac{1}{\alpha}x_0,y_0\right)=1$.
Donc $\exists x_1,y_1\in E$ tq $\varphi(x_1,y_1)=1$. Mais $\forall\, x\in E \quad \varphi(x,x)=0$.
Prenons alors $x=x_1+y_1\Rightarrow\varphi(x_1,y_1,x_1+y_1)=0\Rightarrow\varphi(x_1,x_1)+\varphi(x_1,y_1)+\varphi(y_1,x_1)+\varphi(y_1,y_1)=0$
$\Rightarrow 0+1+1+0=0\Rightarrow 1+1=0\Rightarrow\mathbb{K}$ est de caractéristique 2.

Corrolaire : $\mathbb{K}$ est de caractéristique $\neq 2$ et $\varphi\neq(0)\Rightarrow\exists\, b\in E\backslash\{0\}$ tq $\varphi(b,b)\neq 0$.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $\mathbb{K}$ de caractéristique $\neq 2$. Si $\dim E=n\geqslant 1$.

φ forme bilinéaire symétrique non nulle sur E, alors il existe une base $(b_1,\ldots,b_n)$ de E orthogonale pour φ c'est à dire $(b_1,\ldots,b_n)$ base de E et $\varphi(b_i,b_j)=0$ si $i\neq j$.

Démo : par récurrence

- $n=1$. $\dim E=1$. $\quad E=\langle b\rangle$ rien à démontrer.
- Hypothèse de récurrence : $\forall\, F$ espace vectoriel de dimension $n-1$, g forme bilinéaire symétrique sur F alors il existe une base de F orthogonale pour g.

- Soit φ forme bilinéaire symétrique sur E, $\dim E = n$
  - Si $\varphi = (0)$ toute base de E est orthogonale pour φ
  - Si $\varphi \neq (0)$ (corrolaire) $\Rightarrow \exists\, b_1 \in E$, b_1 non isotrope c'est à dire $\varphi(b_1, b_1) \neq 0$

  On sait que $E = \langle b_1 \rangle \oplus b_1^{\perp}$.
  On pose $F = b_1^{\perp} = \{x \in E \ \text{ tq } \ \varphi(b_1, x) = 0\}$; Soit g la restriction de φ à F.
  D'après l'hypothèse de récurrence, F admet une base orthogonale pour g, c'est à dire qu'il existe $(b_1, \ldots, b_n)$ base orthogonale de F pour g. $\big(g(b_i, b_j) = 0$ si $i \neq j$ pour tout $2 \leqslant i, j \leqslant n\big)$.
  On vérifie que $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est une base orthogonale pour φ.

Exemple : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 ; $e = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de E.

`(Le prof) Faut que j'écrive bien parce que j'arrive pas à me lire... (Les élèves) >_< !`

Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur E donc la matrice est $A = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Construire une base (b_1, b_2, b_3) orthogonale pour φ.

Prenons $b_1 = e_1$ et $\varphi(b_1, b_1) = \varphi(e_1, e_1) = 4$. On a bien b_1 non isotrope. Donc $E = \langle b_1 \rangle \oplus b_1^{\perp}$.
$b_1^{\perp} = \{x \in E \ / \ \varphi(x, b_1) = 0\}$. Donc $x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3 \in b_1^{\perp}$ ssi $\varphi(x, b_1) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3, e_1) = 0 \Leftrightarrow x_1\, \varphi(e_1, e_1) + x_2\, \varphi(e_2, e_1) + x_3\, \varphi(e_3, e_1) = 0 \Leftrightarrow 4\, x_1 + x_2 + 2\, x_3 = 0$.

$b_1 = \{x \in E \ / \ 4\, x_1 + x_2 + 2\, x_3 = 0\}$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in b_1^{\perp}$ ssi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4\, x_1 - 2\, x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Posons $M_2 = b_1^{\perp} \Rightarrow \dim M_2 = 2$; et $M_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$; Choisissons $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; b_2 est-il isotrope ?
Or $\varphi(b_2, b_2) = \varphi(b_2, e_1 - 4\, e_2) = \varphi(b_2, e_1) - 4\, \varphi(b_2, e_2) = -4\, \varphi(e_1 - 4\, e_2, e_2) = -4\, \varphi(e_1, e_2) + 16\, \varphi(e_2, e_2) = -4 \times 1 + 16 \times 4 = 60$. $M_2 = \langle b_2 \rangle \oplus b_2^{\perp}$. Cherchons $b_2^{\perp} = \big\{z \in M_2 \ / \ \varphi(z, b_2) = 0\big\} = \big\{z \in M_2 \ / \ \varphi(z, e_1 - 4\, e_2) = 0\big\}$ $= \big\{z = {}^t(\, z_1 \ \ z_2 \ \ z_3\,) \ \text{ tq } \ z \in M_2 \text{ et } \varphi(z, e_1 - 4\, e_2) = 0\big\} = \begin{cases} 4\, z_1 + z_2 + 2\, z_3 = 0 \\ \varphi(z, e_1)|_{=0} - 4\, \varphi(z, e_2) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4\, z_1 + z_2 + 2\, z_3 = 0 \\ \varphi(z_1\, e_1, e_2) + \varphi(z_2\, e_2, e_2) + \cdots = 0 \end{cases}$
$= \begin{cases} 4\, z_1 + z_2 + 2\, z_3 = 0 & (1) \\ z_1 + 4\, z_2 - 2\, z_3 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) + (2) \Rightarrow 5\, z_1 + 5\, z_2 = 0 \\ (2) \Rightarrow 2\, z_3 = z_1 + 4\, z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = -z_1 \\ z_3 = -\frac{3}{2}\, z_1 \end{cases}$ donc $b_1^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$.
Il suffit de prendre $b_3 = (\, 2 \ \ -2 \ \ -3\,)$.

Donc (b_1, b_2, b_3) est la base de E orthogonale pour φ cherchée. On sait que $\varphi(b_1, b_1) = 4$; $\varphi(b_2, b_2) = 60$; $\varphi(b_3, b_3) = -15$.

Remarque : On avait $e = (e_1, e_2, e_3)$ et on a construit une nouvelle base $B = (b_1, b_2, b_3)$.

> On sait que $\mathcal{M}_e(\varphi) = A$; $\mathcal{M}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \equiv A'$.
> Soit P la matrice de passage de la base e à la base $B \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
> On sait que $A' = {}^tP A\, P$.
>
> De plus si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_e \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_B$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_e \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}_B$. On sait que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$.
> On a alors $\varphi(x, y) = \varphi(x_1'\, b_1 + x_2'\, b_2 + x_3'\, b_3, y_1'\, b_1 + y_2'\, b_2 + y_3'\, b_3) = x_1'\, y_1'\, \varphi(b_1, b_1) + x_2'\, y_2'\, \varphi(b_2, b_2) + x_3'\, y_3'\, \varphi(b_3, b_3) = 4\, x_1'\, y_1' + 60\, x_2'\, y_2' - 15\, x_3'\, y_3' \Rightarrow \Phi(x) = 4\, x_1'^2 + 60\, x_2'^2 - 15\, x_3'^2$

III. Formes quadratique sur une espace de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n. Soit Φ une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire.

En notant $B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, on sait que $\mathcal{M}_B(\varphi) \equiv A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; A est symétrique. $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. $\varphi(x, y) = {}^tX\, A\, Y$ où $x = (x_1, \ldots, x_n) \rightsquigarrow X = {}^t(\, x_1 \ \cdots \ x_n\,)$; $y = (y_1, \ldots, y_n) \rightsquigarrow Y = {}^t(\, y_1 \ \cdots \ y_n\,)$.
D'où $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\, x_i\, x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii}\, x_i^2 + \mathbf{2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n}^{i \neq j} a_{ij}\, x_i\, x_j$

Def : On appelle matrice d'une forme quadratique Φ dans une base B de E la matrice de sa forme polaire.

> Donc $\mathcal{M}_B(\Phi) = \mathcal{M}_B(\varphi)$.

Remarque : Soit $\Phi : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Phi(x) \in \mathbb{K} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j \end{array}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$.

Sa forme polaire φ s'obtient en écrivant : $\varphi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\,x_i\,y_i+\frac{1}{2}\sum_{i\leqslant i,j\leqslant n}^{i\neq j}\alpha_{ij}\,(x_i\,y_j+x_j\,y_i)$
C'est à dire que φ s'obtient par la règle de dédoublement des variables. Autrement dit :
$x_i^2 \rightsquigarrow x_i\,y_i$; $x_i\,x_j \rightsquigarrow \frac{1}{2}\,(x_i\,y_j+x_j\,y_i)$. Ainsi la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $a_{ii}=\alpha_{ii}$ et $a_{ij}|_{i\neq j}=\frac{1}{2}\,\alpha_{ij}$

Def : On appelle rang de Φ (ou rang de φ) le rang de $\mathcal{M}_B(\Phi)$

Ce rang ne dépend pas du choix de la base et on le note rg(Φ) ou rg(φ).

Remarque : Si $B=(e_1,\ldots e_n)$ et $B'=(e'_1,\ldots,e'_n)$ sont deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'

On sait que $\mathcal{M}_{B'}(\Phi)={}^tP\mathcal{M}_B(\Phi)\,P$.

Si on note $A=\mathcal{M}_B(\Phi)$; $A'=\mathcal{M}_{B'}(\Phi)$. On a donc $A'={}^tPA\,P$; les matrices A et A' sont dites congruentes.

Propositions : Soit $B=(e_1,\ldots e_n)$ base de E et $A=\mathcal{M}_B(\Phi)$. Soit $x\in E\quad x=\sum_{i=1}^{n}x_i\,e_i$ et $X={}^t\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}$.

i. Le vecteur X est dans le noyau de Φ ssi $A\,X=0$

ii. On sait que rq$(\Phi)+\dim\big(N(\Phi)\big)=n$

iii. Φ est non dégénérée, c'est à dire $N(\Phi)=\{0\}\Leftrightarrow$ rq$(\Phi)=n\Leftrightarrow\mathcal{M}_B(\Phi)$ est inversible

iv. Φ est non dégénérée ssi $\det\big(\mathcal{M}_B(\Phi)\big)\neq 0$

IV. Formes quadratique avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Φ forme quadratique sur E qui est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et φ sa forme polaire.

Def : Une forme quadratique Φ sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel est dite

- positive (respectivement négative) ssi $\forall\,x\in E\quad\Phi(x)\geqslant 0$ (respectivement $\forall\,x\in E\quad\Phi(x)\leqslant 0$)
- définie ssi $\forall\,x\in E\quad\Phi(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Remarque : Φ est dite définie positive ssi $\forall\,x\in E\backslash\{0\}\quad\Phi(x)>0$.

Inégalité de Schwarz :

1. Soit une forme quadratique positive sur E alors $\forall\,x,y\in E\quad[\varphi(x,y)]^2\leqslant\Phi(x)\,\Phi(y)$
2. Si Φ est définie alors on a : $[\varphi(x,y)]^2=\Phi(x)\,\Phi(y)\Rightarrow(x,y)$ liée.

Démo :

1. Pour $x,y\in E$ fixés, on considère l'application $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $T:t\mapsto\Phi(t\,x+y)=\varphi(t\,x+y,t\,x+y)=t^2\,\Phi(x)+2\,t\,\varphi(x,y)+\Phi(y)\geqslant 0$ car Φ est positive.

   T est une fonction polynomiale de degré 2 à condition que $\Phi(x)\neq 0$, de plus T est positive donc son discriminant Δ' est négatif ou nul c'est à dire $\Delta'=[\varphi(x,y)]^2-4\,t^2\,\Phi(y)\Rightarrow[\varphi(x,y)]^2\leqslant\Phi(x)\,\Phi(y)$.

   Si $\Phi(x)=0$ alors on aura $\forall\,t\in\mathbb{R},\ 2\,t\,\varphi(x,y)+\Phi(y)\geqslant 0$ alors nécessairement $\varphi(x,y)=0$ et donc l'inégalité de Schwarz est encore vérifiée.

2. Si x est non nul, on a $\Phi(x)\neq 0$ car Φ est définie. De plus $[\varphi(x,y)]^2=\Phi(x)\,\Phi(y)\Rightarrow\Phi\Big(y-\frac{\varphi(x,y)}{\Phi(x)}\,x\Big)=0$ (il suffit de vérifier en utilisant l'inégalité $\Phi(x-y)=\Phi(x)-2\,\varphi(x,y)+\Phi(y)$) comme Φ est définie $\Rightarrow y-\frac{\varphi(x,y)}{\Phi(x)}\,x=0\Rightarrow(x,y)$ liée.
   Rappel : Si le vecteur nul appartient à une famille, elle sera liée.

Inégalité de Minkowski :

i. Soit Φ une forme quadratique positive sur E alors $\forall\,x,y\in E\quad\sqrt{\Phi(x+y)}\leqslant\sqrt{\Phi(x)}+\sqrt{\Phi(y)}$.

ii. Si Φ est définie positive on a $\sqrt{\Phi(x+y)}=\sqrt{\Phi(x)}+\sqrt{\Phi(y)}\Rightarrow\begin{cases} x=0\\ \text{ou}\\ \exists\,\lambda\in\mathbb{R}^+\text{ tq } y=\lambda\,x\ \ \text{(x et y sont dits positivement liés)}\end{cases}$

Démo :

i. $\Phi(x+y)=\varphi(x+y,x+y)=\Phi(x)+2\,\varphi(x,y)+\Phi(y)\leqslant\Phi(x)+2\,\sqrt{\Phi(x)}\,\sqrt{\Phi(y)}+\Phi(y)$ (inégalité de Schwarz)
$\Rightarrow\Phi(x+y)\leqslant\Big(\sqrt{\Phi(x)}+\sqrt{\Phi(y)}\Big)^2\Rightarrow\sqrt{\Phi(x+y)}\leqslant\sqrt{\Phi(x)}+\sqrt{\Phi(y)}$.

ii. $\forall\, x, y \in E \quad \Phi(x+y) = \Phi(x) + 2\,\varphi(x,y) + \Phi(y)$ (1).

Si $\sqrt{\Phi(x+y)} = \sqrt{\Phi(x)} + \sqrt{\Phi(y)} \Rightarrow \Phi(x+y) = \Phi(x) + 2\sqrt{\Phi(x)}\,\sqrt{\Phi(y)} + \Phi(y)$ (2).

(1) et (2) $\varphi(x,y) = \sqrt{\Phi(x)}\,\sqrt{\Phi(y)} \Rightarrow [\varphi(x,y)]^2 = \Phi(x)\,\Phi(y) \Rightarrow (x,y)$ liées d'après *ii)* de l'inégalité de Schwarz. Donc ou bien $x = 0$ ou bien $y = \lambda x$. Comme $\varphi(x,y) = \sqrt{\Phi(x)}\,\sqrt{\Phi(y)} \Rightarrow \varphi(x, \lambda x) = \sqrt{\Phi(x)}\sqrt{\Phi(\lambda x)} \Rightarrow \lambda\,\varphi(x,x) = \sqrt{\Phi(x)}\,|\lambda|\,\sqrt{\Phi(y)} \Rightarrow \lambda\,\Phi(x) = |\lambda|\,\Phi(x) \Rightarrow \lambda = |\lambda| \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^+$ donc (x,y) est positivement lié.

Remarque : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n. Avec caract$(\mathbb{R}) = 0$ $(\neq 2)$

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E ; On sait qu'il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de E orthogonale pour φ telle que $\varphi(b_i, b_j) = 0$ si $i \neq j$.

Soit $x \in E \quad x = \sum_{i=1}^n x'_i\, b_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^n y'_i\, b_i \quad ; \quad \varphi(x,y) = \sum_{i=1}^n x'_i\, y'_i\, \varphi(b_i, b_i)$

On suppose $(b_1, \ldots, b_n)$ numérotés tels que $\underset{1 \leqslant i \leqslant r}{\varphi(b_i; b_i) > 0}$; $\underset{r+1 \leqslant j \leqslant r+s}{\varphi(b_j, b_j)} < 0$ et $\underset{r+s+1 \leqslant k \leqslant n}{\varphi(b_k, b_k)} = 0$.

On appelle (r, s) la signature de la forme quadratique Φ.

Théorème d'inertie de Sylvester :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. φ unr forme bilinéaire symétrique sur E. $\forall\,(b_1, \ldots, b_n)$ base orthogonale pour φ.

En notant $r \equiv$ le nombre d'indice tels que $\varphi(b_i, b_i) > 0$ et s tels que $\varphi(b_i, b_i) < 0$ alors r et s sont invariants. $r + s = \mathrm{rq}(\varphi) = \mathrm{rq}(\Phi)$; Φ forme quadratique associée à φ. Le couple (r, s) s'appelle la signature de Φ.

Démo :

Soit B et B' deux bases orthogonales pour φ.

$$B = (\underbrace{\overbrace{b_1, \ldots, b_r}^{M}}_{\varphi(b_i,b_i)>0}, \underbrace{\overbrace{b_{r+1}, \ldots, b_{r+s}, b_{r+s+1}, \ldots, b_n}^{N \text{ s.e.v engendré par ces vecteurs}}}_{\varphi(b_j,b_j)<0 \;\; \varphi(b_k,b_k)=0}) \text{ et } B' = (\underbrace{\overbrace{b'_1, \ldots, b'_r}^{M'}}_{\varphi(b'_i,b'_i)>0}, \underbrace{\overbrace{b'_{r+1}, \ldots, b'_{r+s}, b'_{r+s+1}, \ldots, b'_n}^{N' \text{ s.e.v engendré par ces vecteurs}}}_{\varphi(b'_j,b'_j)<0 \;\; \varphi(b'_k,b'_k)=0})$$

Déterminons $M \cap N'$:

Soit $x \in M \cap N'$ alors $x \in M \Rightarrow x = x_1\, b_1 + \cdots + x_r\, b_r$ et $x' \in N' \Rightarrow x = x'_{r+1}\, b_{r+1} + \cdots + x'_n\, b'_n$

$$\left.\begin{aligned} \text{d'où } \varphi(x,x) &= x_1^2\, \varphi(b_1, b_1) + \cdots + x_r^2\, \varphi(b_r, b_r) \geqslant 0 \\ &= x_{r+1}^2\, \varphi(b_{r+1}, b_{r+1}) + \cdots + x_n^2\, \varphi(b_n, b_n) \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(x,x) = 0$$

d'où $\varphi(x,x) = 0 = x_1^2\, \varphi(b_1, b_1) + \cdots + x_r^2\, \varphi(b_r, b_r) \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, r]\!] \quad x_i^2\, \varphi(b_i, b_i) = 0$ comme $\varphi(b_i, b_i) \neq 0 \Rightarrow x_i = 0$ donc $x = 0$ donc $M \cap N' = \{0\} \Rightarrow$ la somme $M + N'$ est directe $\Rightarrow \dim(M \oplus N') = r + n - r' \leqslant n \Rightarrow r - r' \leqslant 0 \Rightarrow r \leqslant r'$ de même en faisont un raisonnement analogue sur $M' \cap N$ on obtient $r' \leqslant r$ donc $r = r'$ et une démonstration « analogue » montrera que $s = s'$ donc r et s sont invariants.

Exemple : $n = 3$; Soit φ ma forme bilinéaire symétrique sur E dont la matrice $A = \big(\varphi(e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

On avait construit une base orthogonale pour φ et on a trouvé $\mathcal{M}_{(b_1,b_2,b_3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$. On a donc $\varphi(b_1, b_1) = 4$; $\varphi(b_2, b_2) = 60$; $\varphi(b_3, b_3) = -15 \quad \Rightarrow r = 2,\ s = 1 \Rightarrow (2,1)$ est la signature de Φ forme quadratique associée à φ.

Remarque : Soit P la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (b_1, b_2, b_3) ; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On sait que $X = P X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ c'est à dire $X' = P^{-1}\, X = T\, X$ en posant $T = P^{-1}$, $T = (t_{ij})$. D'où $\begin{cases} x'_1 = t_{11}\, x_1 + t_{12}\, x_2 + t_{13}\, x_3 \\ x'_2 = t_{21}\, x_1 + t_{22}\, x_2 + t_{23}\, x_3 \\ x'_3 = t_{31}\, x_1 + t_{32}\, x_2 + t_{33}\, x_3 \end{cases}$

Or $\Phi(x) = \varphi(x,x) = \varphi(x'_1\, b_1 + x'_2\, b_2 + x'_3\, b_3, x'_1\, b_1 + x'_2\, b_2 + x'_3\, b_3) = {x'_1}^2\, \varphi(b_1, b_1) + {x'_2}^2\, \varphi(b_2, b_2) + {x'_3}^2\, \varphi(b_3, b_3) = 4\,{x'_1}^2 + 60\,{x'_2}^2 - 15\,{x'_3}^2 = 4\,(t_{11}\, x_1 + t_{12}\, x_2 + t_{13}\, x_3)^2 + 60\,(t_{21}\, x_1 + t_{22}\, x_2 + t_{23}\, x_3)^2 - 15\,(t_{31}\, x_1 + t_{32}\, x_2 + t_{33}\, x_3)^2$

V. Méthode de Gauss

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n ; $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}\, x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j \quad \Rightarrow \mathcal{M}_e(\Phi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}^{1 \leqslant i \leqslant n}$.

`Il choisit encore bien son moment pour sortir...`

Cas I à traiter d'abord : $\exists\, \alpha_{ii} \neq 0$ par exemple $\alpha_{11} \neq 0$ alors

$$\Phi(x) = \alpha_{11}\, x_1^2 + 2\, x_1 \sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j}\, x_j + \underbrace{2 \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{ii}\, x_i^2}_{\text{reste}}$$

$$\Phi(x) = \alpha_{11}\Big[x_1^2 + 2\, x_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}} x_j\Big] + \text{reste}$$

$$\Phi(x) = \alpha_{11}\Big(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}\, x_j\Big)^2 \underbrace{- \alpha_{11}\Big(\sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha 11}\, x_j\Big)^2 + \text{reste}}_{\text{nouveau reste}}.$$

S'il y a encore des carrés on recommence le cas I.

Cas II : Si tous les α_{ii} sont nuls $\Rightarrow \Phi(x) = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j$. $\exists\, \alpha_{ij} \neq 0$ par exemple $\alpha_{37} \neq 0$ alors

$$\Phi(x) = 2\, \alpha_{37}\, x_3\, x_7 + 2\, x_3 \sum_{j \neq 3}^{j=1} \alpha_{3j}\, x_j + 2\, x_7 \sum_{j \neq 7}^{j=1} \alpha_{j7}\, x_j + \underbrace{2 \sum_{i \neq 3, j \neq 7}^{i,j} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j}_{\text{reste}}$$

$$\Phi(x) = 2\, \alpha_{37}[x_3\, x_7 + x_3\, L + x_7\, L'] + \text{reste}$$

$$\Phi(x) = 2\, \alpha_{37}\, [(x_3 + L')(x_7 + L) - L\, L'] + \text{reste}$$

$\Phi(x) = 2\, \alpha_{37}(x_3 + L')(x_7 + L) \underbrace{- 2\, \alpha_{37}\, L\, L' + \text{reste}}_{\text{nouveau reste}}$. On utilise la formule $A\, B = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2$ donc

$$\Phi(x) = 2\, \alpha_{37}\left[\left(\frac{x_3 + L' + x_7 + L}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_3 + L' - x_7 - L}{2}\right)^2\right] + \text{reste}$$

$$\Phi(x) = 2\, \alpha_{37}\left(\frac{x_3 + x_7 + L' + L}{2}\right)^2 - 2\, \alpha_{37}\left(\frac{x_3 - x_7 + L' - L}{2}\right)^2 + \text{reste}$$

Exemple : $n = 4$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Soit $\Phi(x) = x_1^2 + 3\, x_2^2 + 6\, x_1\, x_3 + 4\, x_1\, x_4 - 6\, x_2\, x_3 + 4\, x_3\, x_4 - 4\, x_2\, x_4 - 4\, x_1\, x_2$.
   Décomposition en carrés de Gauss.

   $\Phi(x) = x_1^2 + 2\, x_1\, (3\, x_3 + 2\, x_4 - 2\, x_2) + \text{reste} = (x_1 + 3\, x_3 + 2\, x_4 - 2\, x_2)^2 - (3\, x_3 + 2\, x_4 - 2\, x_2)^2 + \text{reste}$
   $\Phi(x) = (x_1 + 3\, x_3 + 2\, x_4 - 2\, x_2)^2 - (3\, x_3 + 2\, x_4 - 2\, x_2)^2 + 3\, x_2^2 - 6\, x_2\, x_3 + 4\, x_3\, x_4 - 4\, x_2\, x_4$
   $\Phi(x) = (x_1 + 3\, x_3 + 2\, x_4 - 2\, x_2)^2 - x_2^2 - 9\, x_3^2 - 4\, x_4^2 + 6\, x_2\, x_3 - 8\, x_3\, x_4 + 4\, x_2\, x_4$

   $\Phi_2(x) = -x_2^2 - 9\, x_3^2 - 4\, x_4^2 + 6\, x_2\, x_3 - 8\, x_3\, x_4 + 4\, x_2\, x_4$

   $\Phi_2(x) = -x_2^2 + 6\, x_2\, x_3 + 4\, x_2\, x_4 - 9\, x_3^2 - 4\, x_4^2 - 8\, x_3\, x_4$
   $\Phi_2(x) = -\left[x_2^2 - 2\, x_2\, (3\, x_3 + 2\, x_4)\right] - 9\, x_3^2 - 4\, x_4^2 - 8\, x_3\, x_4$
   $\Phi_2(x) = -\left[\left(x_2 - (3\, x_3 + 2\, x_4\right)^2 - (3\, x_3 + 2\, x_4)^2\right] - 9\, x_3^2 - 4\, x_4^2 - 8\, x_3\, x_4 = -(x_2 - 3\, x_3 - 2\, x_4)^2 + \Phi_3(x)$

   $\Phi_3(x) = (3\, x_3 + 2\, x_4)^2 - 9\, x_3^2 - 4\, x_4^2 - 8\, x_3\, x_4 = 4\, x_3\, x_4 = 4\left[\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2\right] = (x_3 - x_4)^2 - (x_3 - x_4)^2$

   Donc $\Phi(x) = (x_1 + 3\, x_3 + 2\, x_4 - 2\, x_2)^2 - (x_2 - 3\, x_3 - 2\, x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 - (x_3 - x_4)^2$.
   $\operatorname{sgn}(\Phi) = (2, 2) \Rightarrow \operatorname{rg}(\Phi) = 2 + 2 = 4$.

   On sait que $X = P X' \Leftrightarrow X' = P^{-1}\, X$.

   Si on pose $\left\{\begin{array}{l} x_1' = x_1 - 2\, x_2 + 3\, x_3 + 2\, x_4 \\ x_2' = x_2 - 3\, x_3 - 2\, x_4 \\ x_3' = x_3 + x_4 \\ x_4' = x_3 - x_4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (1) + (2) \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\, x_3' + \frac{1}{2}\, x_4' \\ (1) - (2) \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}\, x_3' - \frac{1}{2}\, x_4' \\ (3) \Rightarrow x_2 = x_2' + \frac{5}{2}\, x_3' + \frac{1}{2} x_4' \\ (4) \Rightarrow x_1 = x_1' + 2\, x_2' + \frac{5}{2}\, x_3' + \frac{1}{2}\, x_4' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1' + 2\, x_2' + \frac{5}{2}\, x_3' + \frac{1}{2}\, x_4' \\ x_2 = x_2' + \frac{5}{2}\, x_3' + \frac{1}{2}\, x_4' \\ x_3 = \frac{1}{2}\, x_3' + \frac{1}{2}\, x_4' \\ x_4 = \frac{1}{2}\, x_3' - \frac{1}{2}\, x_4' \end{array}\right.$

   $P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$. La base (b_1, b_2, b_3, b_4) est une base orthogonale pour φ par identification on a :

   $\Phi(x) = 1 - {x_1'}^2 - 1\, {x_2'}^2 + 1\, {x_3'}^2 - 1\, {x_4'}^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i'^2 \varphi(b_i, b_i) \Rightarrow \varphi(b_1, b_1) = 1$; $\varphi(b_2, b_2) = -1$; $\varphi(b_3, b_3) = 1$; $\varphi(b_4, b_4) = -1 \Rightarrow \mathcal{M}_{(b_1, b_2, b_3, b_4)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & -1 \end{pmatrix}$. On sait que $\mathcal{M}_{(b_1, b_2, b_3, b_4)}(\varphi) = {}^{t}P \mathcal{M}_{(e_1, e_2, e_3, e_4)}(\varphi)\, P$.

   On a $\operatorname{rg}(\varphi) = 4 \Rightarrow \dim\big(N(\varphi)\big) = 4 - 4 = 0 \Rightarrow N(\varphi) = \{0\} \Rightarrow \varphi$ est non dégénérée.

2. $q(x) = 4\, x_1\, x_2 + 8\, x_1\, x_3 - 6\, x_1\, x_4 + 4\, x_2\, x_3 - 6\, x_2\, x_4 + 14\, x_3\, x_4$.

   $$\frac{\mathcal{M}(q)}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ -3 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

   Construire une base orthogonale pour q.

$q(x) = 4\,x_1\,x_2 + x_1\,(8\,x_3 - 6\,x_4) + x_2\,(4\,x_3 - 6\,x_4) + 14\,x_3\,x_4 = 4\Big[x_1\,x_2 + x_1\left(2\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right) + x_2\left(x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right)\Big] + 14\,x_3\,x_4$
$= 4\Big[\left(x_1 + x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right)\left(x_2 + 2\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right) - \left(2\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right)\left(x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right)\Big] + 14\,x_3\,x_4$
$= 4\left(x_1 + x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right)\left(x_2 + 2\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right) - \underbrace{4\left(2\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right)\left(x_3 - \frac{3}{2}\,x_4\right) + 14\,x_3\,x_4}_{\text{nouveau reste} \equiv Q(x)}$
$= 4\left[\left(\frac{x_1 + x_3 - \frac{3}{2}\,x_4 + x_2 + 2\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 + x_3 - \frac{3}{2}\,x_4 - x_2 + 2\,x_3 - \frac{3}{2}\,x_4}{2}\right)^2\right] + Q(x)$
$= (x_1 + x_2 + 3\,x_3 - 3\,x_4)^2 - (x_1 - x_2 - x_3)^2 + Q(x).$

Où $Q(x) = -8\,x_3^2 + 32\,x_3\,x_4 - 9\,x_4^2 = -8\,(x_3^2 - 4\,x_3\,x_4) - 9\,x_4^2 = -8\,(x_3^2 - 2\,x_3\,(2\,x_4)) - 9\,x_4^2 = -8\left[(x_3 - 2\,x_4)^2 - 4\,x_4^2\right] - 9\,x_4^2 = -8\,(x_3 - 2\,x_4)^2 + 23\,x_4^2$.

D'où $q(x) = (x_1 + x_2 + 3\,x_3 - 3\,x_4)^2 - (x_1 - x_2 - x_3)^2 - 8\,(x_3 - 2\,x_4)^2 + 23\,x_4^2 \Rightarrow \mathrm{sgn}(q) = (2,2) \Rightarrow \mathrm{rg}(q) = 4$.
Soit φ la forme polaire de q. $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ est non dégénérée.

Construction de la base orthogonale pour φ : On pose $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 3\,x_3 - 3\,x_4 \\ x_2' = x_1 - x_2 - x_3 \\ x_3' = x_3 - 2\,x_4 \\ x_4' = x_4 \end{cases}$. On sait que $X = P\,X' \Rightarrow X' = P^{-1}\,X$. On inverse le système [...] : $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\,x_1' + \frac{1}{2}\,x_2' - x_3' - \frac{1}{2}\,x_4' \\ x_2 = \frac{1}{2}\,x_1' - \frac{1}{2}\,x_2' - 2\,x_3' - \frac{5}{2}\,x_4' \\ x_3 = x_3' + 2\,x_4' \\ x_4 = x_4' \end{cases} \Rightarrow P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$.
D'où la base orthogonale pour φ est $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

Comme on a $q(x) = 1\,{x_1'}^2 - 1\,{x_2'}^2 - 8\,{x_3'}^2 + 23\,{x_4'}^2$ alors $\mathcal{M}_B(\varphi) = \mathcal{M}_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$.