Intégrales curvilignes

I. Champ de vecteur

Dans ce chapitre, $n=2$ ou $n=3$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

On dit qu'un domaine $D\subset\mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs si à tout point $M\in D$ on fait correspondre un vecteur $\vec{V}(M)$ d'origine M et dont les composantes sont des fonctions des coordonnées de M. Ainsi $\vec{V}:\begin{array}{l} D\to\mathbb{R}^n\\ M\mapsto\vec{V}(M)\end{array}$.

Exemple : Si $n=2$ alors $\vec{V}(M)=\Big(P(x,y),Q(x,y)\Big)$ avec $M(x,y)$

II. Intégrales curvilignes d'une forme différentielle le long d'un arc $\widehat{AB}$

Au champ de vecteurs $\vec{V}(M)=\Big(P(x,y),Q(x,y)\Big)$. On associe la forme différentielle $\omega=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$.

Soit (C) une courbe dans D et joignant les deux points A et B. (C) définie par la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=x(t)\\ y=y(t)\end{array}\right.$, le point M de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ décrit l'arc $\widehat{AB}$ quand t varie entre a et b.

II.1. Def : L'intégrale $\int_{\widehat{AB}}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{\widehat{AB}}\vec{V}(M)\,d\vec{M}$ est appelée intégrale curviligne (ou circulation de $\vec{V}(M)$) le long de l'arc $\widehat{AB}$.

Remarque : $M=\Big(x(t),y(t)\Big)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{OM}}'=\frac{d\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}=\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$. On note $\vec{M}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ donc $\vec{M}'=\overrightarrow{\mathrm{OM}}'=\frac{d\vec{M}}{dt}$

$\Rightarrow d\vec{M}=\vec{M}'\,dt$ alors $\int_{\widehat{AB}}\vec{V}(M)\cdot d\vec{M}=\int_a^b\begin{pmatrix} P(x,y)\\ Q(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}dt=\int_a^b\Big(P(x,y)\,x'(t)+Q(x,y)\,y'(t)\Big)\,dt=\int_a^b\vec{V}(M)\cdot\vec{M}'(t)\,dt$

Exemple : Soit Γ le demi cercle de $\mathbb{R}^2$ paramétré par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos t\\ y(t)=\sin t\end{array}\right.$, $t\in[0,\pi]$ et $\vec{V}=\begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$.

1. Calculer la circulation de $\vec{V}(M)$ le long de (Γ).

   On a $\vec{M}=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{M}'=\begin{pmatrix} -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ et $\vec{V}(M(t))=\begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{1} & \frac{\cos t}{1}\end{pmatrix}$

   $\int_\Gamma\vec{V}(M)\,d\vec{M}=\int_0^\pi\vec{V}(M(t))\,\vec{M}'(t)\,dt=\int_0^\pi(\sin^2t+\cos^2t)\,dt=\int_0^\pi dt=[t]_0^\pi=\pi$.

2. Soit Γ l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $0\leqslant x\leqslant 1$ et $y=2x^2$. Rq : On a $y=2x^2\Rightarrow dy=4x\,dx$
   Calculer $I=\int_\Gamma x^2\,y\,dx+(x^2-y^2)\,dy$

   $I=\int_0^1 x^2(2x^2)\,dx+\Big(x^2-(2x^2)^2\Big)4x\,dx=\int_0^1(-16x^5+2x^4+4x^3)\,dx=\frac{-19}{15}$.

II.2. Propriétés

II.2.1. Relation de Chasles

$\int_{\widehat{AB}}\vec{V}(M)\,d\vec{M}=\int_{\widehat{AC}}\vec{V}(M)\,d\vec{M}+\int_{\widehat{CB}}\vec{V}(M)\,d\vec{M}$.

II.2.2. Cas d'un contour fermé

Dans le cas d'un contour fermé les points A et B sont confondus, seul importe le sens du parcours de Γ.
On convient que si Γ est d'un seul tenant et sans point double alors $I=\int_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ représente l'intégrale prise dans le sens qui laisse du côté gauche l'aire intérieure à Γ, sens dit positif, et donc changer le sens du parcours de Γ revient à changer le signe de I d'où $\int_{\vec{\Gamma}}P\,dx+Q\,dy=-\int_{\overleftarrow{\Gamma}}P\,dx+Q\,dy$. `Notation NON internationale !`

`Un point double est notamment un point où la trajectoire passe deux fois (intersection). Une trajectoire qui n'est pas d'un seul tenant est par exemple deux cercles qui se touchent (deux morceaux fermés : deux trajectoires).`

II.3. Théorème de Green-Riemann

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ limité (on dit aussi délimité) par une courbe fermée Γ.

Considérons une forme différentielle définie dans (on dit aussi sur) D, $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ et supposons que P et Q possèdent des dérivées partielles premières continues dans D alors :
$\int_{\vec{\Gamma}} P dx + Q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

Applications : Aire d'une surface limitée par une courbe.

Par définition on sait que l'aire du domaine D limité par la courve fermée Γ est $\mathcal{A} = \int\int_D 1\,dx\,dy$.

Comme $\int\int_D 1\,dx\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dx\,dy = \frac{1}{2}\int\int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dx\,dy$ $\underset{\text{Green-Riemann}}{=} \int_{\vec{\Gamma}} x\,dy = -\int_{\vec{\Gamma}} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\vec{\Gamma}} x\,dy - y\,dx$. On choisit assez souvent $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\vec{\Gamma}} x\,dy - y\,dx$

Exemple :

1. Aire délimitée par une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b.

   Représentation paramétrique de l'ellipse : $\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -a\sin t \\ y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = b\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -a\sin t \\ dy = b\cos t \end{cases}$.

   $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t(b\cos t\,dt) - b\sin t(-a\sin t)\,dt = \frac{1}{2}a\,b\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt = \pi\,a\,b.$

2. Aire d'une courbe plane en coordonnées polaires :

   Si la courbe Γ est définie en coordonnées polaires (r, θ) l'aire s'obtient en faisant sur la formé différentielle $x\,dy - y\,dx$ le changement de variables $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta \\ dy = dr\sin\theta - r\cos\theta\,d\theta \end{cases} \Rightarrow x\,dy - y\,dx = r\cos\theta\,(dr\sin\theta + r\cos\theta\,d\theta) - r\sin\theta\,(dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta) = r^2\,d\theta$ d'où $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\vec{C}} r^2\,d\theta}$

   Attention ! Ceci est spécifique aux intégrales curvilignes.

   Exemple : Aire limitée par la cardioïde d'equation $r = a\,(1 + \cos\theta)$

   $$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\vec{C}} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} a^2\,(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta\right) d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$

Propriété : Si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,f$ et si la courbe Γ a pour origine et extrêmité des points A et B

alors $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{V}(M)\,d\vec{M} = f(B) - f(A)$

Remarque : $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

Démo : $\vec{V}(M(t)) \cdot \vec{M}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(M(t)) \cdot x_i'(t) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(M(t))\,dt = [f(M(t))]_a^b = f(M(b)) - f(M(a)) = f(B) - f(A)$

En particulier, si la courbe Γ est fermée, alors la circulation sur Γ de tout champ de vecteur décrivant un potentiel $\left(\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,f\right)$ est nulle.

Exemple : Soit $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ et C le cercle défini par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$.

alors $\int_{\vec{C}} \vec{V}(M)\,d\vec{M} = \int_0^{2\pi} \vec{V}(M)\,\vec{M}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \Rightarrow \vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel.

Def : On dit qu'une forme différentielle ω sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est **exacte** s'il existe une application f de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\omega = df$. f s'appelle une primitive de ω.

Def : On dit que la forme différentielle $\omega = \omega_1\,dx_1 + \cdots + \omega_n\,dx_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ est **fermée** si elle vérifie :

$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \quad \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$

Proposition : Toute forme différentielle exacte de $\mathcal{C}^1$ est fermée.

Démo : Si ω ce classe $\mathcal{C}^1$ est exacte, alors il existe f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $df = \omega \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad \omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ $\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{dx_i\,dx_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_j}$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on applique le théorème de Schwarz.
D'où $\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_i) \Rightarrow \omega$ est fermée.

La réciproque est fausse en général.

Théorème de Poincarré : il va donner les conditions adéquates pour avoir la réciproque dans le théorème précédent.

Def : On dit que l'ouvert U est **étoilé** *par rapport* à x_0 de U si le segment $[x_0, x]$ est contenu dans U, $\forall\, x \in U$.

Énoncé du théorème : Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé est exacte.

Exemple : Soit la forme différentielle $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\}$

ω est fermée car $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$. En effet $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ donc ω est fermée sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\}$

ω c'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ car son intégrale sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ n'est pas nulle, en effet :
On peut paramétrer le cercle $x^2 + y^2 = 1$ par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\,\pi]$.

$$\int_{\vec{C}} \omega = \int_{\vec{C}} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t\,dt) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t\,dt) = \int_0^{2\pi} dt = 2\,\pi$$

On peut vérifier que ω est exacte sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ par rapport au point $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

Def : Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

On appelle rotationnel de $\vec{V}$ et on note $\mathrm{rot}\,\vec{V}$ le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ avec $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$.

Exemple : Soit $\vec{V} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rappel : On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{V}$ est défini sur un ouvert U dérive d'un potentiel s'il existe $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

Proposition : Si un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ dérive d'un potentiel, alors son rotationnel est nul.

Demo : Si $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ dérive d'un potentiel f alors on a $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \Rightarrow f$ est de classe $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$

et donc pour tout $i \neq j$ $\quad \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0$ d'après le théorème de Schwarz $\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{V} = 0$.

Remarque : La réciproque de ce résultat est fausse en général.

Par exemple le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}$ a un rotationnel nul car $\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial 0}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$.

Mais $\vec{V}(x, y, z)$ ne peut pas dériver d'un potentiel sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ car $\int_{\vec{C}} \vec{V}(M)\,d\vec{M} = \int_{\vec{C}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\,\pi$ où C est le cercle unité centré en 0.

Proposition : Si U est un ouvert étoilé, tout champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ qui a un rotationnel nul dérive d'un potentiel.

Exercice 1. Soit $\vec{V} = (P, Q)$ le champ de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ par $P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$; $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Rq : $\partial\vec{D} = \vec{\Gamma}$. On a $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{V}(M)\,dM = \int_{\vec{\Gamma}} P\,dx + Q\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = 0$ par Green-Riemann car $\vec{V}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

On a montré que la circulation de $\vec{V}$ sur le bord de tout fermé borné inclu dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ est nulle.

Considérons un cercle (C) ne passant pas par $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ et orienté dans le sens trigonométrique :

1. Si C n'entoure pas $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$: le disque limité par C est inclus dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ et donc $\int_{\vec{C}} \vec{V}(M)\,dM = 0$.

2. Si C est centré sur $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ on peut le paramétrer par $\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\,\pi]$ et $\int_{\vec{C}} \vec{V}(M)\,dM = \int_0^{2\pi} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} dt = 2\,\pi$.

3. Si C entoure $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, considérons le domaine D constitué du disque délimité par C privé d'un petit disque ouvert centré en $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le bord orienté de D est constitué de C et du cercle γ orienté dans le sens inverse du sens trigonométrique. On sait alors que $\int_{\partial\vec{D}} \vec{V}(M)\,d\vec{M} = \int_{\vec{C}} \vec{V}(M)\,d\vec{M} + \int_{\vec{\gamma}} \vec{V}(M)\,d\vec{M}$.

   Comme D ne contient pas $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, la circulation de $\vec{V}$ sur un bord est nulle, de plus la circulation de $\vec{V}$ sur le bord de tout fermé borné inclu dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ est nulle, de plus la circulation de $\vec{V}$ sur γ vaut $-2\,\pi$ (attention à l'orientation de γ), d'où $0 = \int_{\vec{C}} \vec{V}(M)\,dM + \int_{\vec{\gamma}} \vec{V}(M)\,d\vec{M} \Rightarrow \int_{\vec{C}} \vec{V}(M)dM = -\int_{\vec{\gamma}} \vec{V}(M)\,d\vec{M} = 2\,\pi$