La plupart du temps la difficulté ne vient pas du calcul des primitives mais du domaine d'intégration.

Intégrales multiples

I. Intégrales doubles

I.1. Intégration sur un compact élémentaire

Pour calculer une intégrale double, il est essentiel de connaître la forme de l'ensemble dans lequel vont varier x et y.

Def : On appelle compact élémentaire du 1er type un sous ensemble K de $\mathbb{R}^2$ défini de la façon suivante :

$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\;\; a\leqslant x\leqslant b \text{ et } y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$ où y_1 et y_2 sont deux fonctions de x de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$

Def 2 : On appelle compact élémentaire du 2e type un sous ensemble K de $\mathbb{R}^2$ défini de la façon suivante :

$K=\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\;\; c\leqslant y\leqslant d \text{ et } x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\}$ où x_1 et x_2 sont deux fonctions de y de classe $\mathcal{C}^1$ par morceau sur $[c,d]$

Théorème : Tout compact élémentaire est un compact un compact est un fermé borné

En effet le compact élémentaire (du 1er type) est borné puisque les fonctions y_1 et y_2 sont continues sur le segment $[a,b]$ et sont donc bornées. On a $K\subset[a,b]\times[m,M]$ où $m=$ minimum de y_1 et $M=$ maximum de y_2 et on peut vérifier que K est un fermé.

Def : Si f est une fonction définie et continue sur un compact élémentaire du 1er type (resp. du 2e type) on pose :

$$\int\int_K f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx \text{ (resp. } \int\int_K f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy\text{).}$$

Def : On dit qu'une partie P de $\mathbb{R}^n$ est un pavé si $P=\varnothing$ ou s'il existe $a=(a_1,...,a_n)$; $b=(b_1,...,b_n)$ tq $P=\prod_{i=1}^n [a_i,b_i]$

P est dit pavé d'extrêmités a et b. produit d'intervalles ↑

Remarques :

1. Un pavé est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ donc c'est un compact de $\mathbb{R}^n$

2. • un pavé non vide de $\mathbb{R}$ est un segment
   • un pavé non vide de $\mathbb{R}^2$ est un rectangle.
   • un pavé non vide de $\mathbb{R}^3$ est un parallélépipède rectangle.

I.2. Technique de calcul d'une intégrale double

I.2.a. Intégrale double sur un pavé (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction définie continue sur un pavé $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\;\; a\leqslant x\leqslant b \text{ et } c\leqslant y\leqslant d\}$ $(P=[a,b]\times[c,d])$
alors $\int\int_P f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy.$

Exemple : Calculer l'aire du rectangle $P=[0,L]\times[0,l]$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\int\int_P 1\,dx\,dy=\int_0^l\left[\int_0^L 1\,dx\right]dy=\int_0^l L\,dy=L\int_0^l dy=L\cdot l\\ &=\int_0^L\left[\int_0^l 1\,dy\right]dx=\int_0^L l\,dx=l\int_0^L dx=l\cdot L\end{aligned}$$

Théorème : Soit f une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ définie sur un pavé. Supposons de plus que $f(x,y)=g(x)\,h(y)$

$$\int\int_P f(x,t)\,dx\,dy=\int_a^b\int_c^d[g(x)\,h(y)\,dy]\,dx=\int_a^b g(x)\left[\int_c^d h(x)\,dy\right]dx=\int_a^b g(x)\,dx\times\int_c^d h(y)\,dy$$

I.2.b. Intégrale double dans un domaine D ou sur un compact élémentaire

Soit f continue dans un domaine D du plan et si D est défini par les conditions :

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\;/\;\; a\leqslant x\leqslant b \text{ et } \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$ alors $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$

Si par contre D est défini par $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; / \;\; c\leqslant y\leqslant d \text{ et } \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}$
alors $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$

Exemples :

- Calculer $I_1=\int\int_{D_1} x\,y\,dx\,dy$ où $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; / \;\; 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ et } 0\leqslant 2\,y\leqslant x\}$

  D_1 n'est pas un pavé mais peut être vu comme un compact élémentaire du 1er type : $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; / \;\; 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ et } 0_{=\varphi_1(x)}\leqslant y\leqslant x_{=\varphi_2(x)}\}\Rightarrow I_1\int\int_{D_1} x\,y\,dx\,dy=\int_0^2\left[\int_0^{x/2} x\,y\,dy\right]dx=\int_0^2 x\left[\int_0^{x/2} y\,dy\right]dx=\int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x/2}dx=\frac{1}{8}\int_0^2 x^3\,dx=\frac{1}{8\times 4}\left[x^4\right]_0^2=\frac{1}{2}$

- Calculer $I_2=\int\int_{D_2} x\,y\,dx\,dy$ où $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; / \;\; x\geqslant 0\ ;\ y\geqslant 0 \text{ et } x+y\leqslant 1\}$ Tracer le domaine tracer les bandes

  $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; / \;\; 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ et } 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$.
  $I_2=\int\int x\,y\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^{1-x} x\,y\,dy\right]dx=\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,(1-x)^2dx=\ldots=\frac{1}{24}$

  Ou bien $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; / \;\; 0\leqslant y\leqslant 1 \text{ et } 0\leqslant x\leqslant 1-y\}$

I.3. Changement de variable

On veut calculer $I=\int\int_D 1\,dx\,dy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; / \;\; y\geqslant 0 \text{ et } x^2+y^2\leqslant R^2,\ R\in\mathbb{R}_+^*\}$: demi **disque** supérieur
$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; / \;\; -R\leqslant x\leqslant R \text{ et } 0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\right\}$
$I=\int_{-R}^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\right]dx=\int_{-R}^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx$ le calcul devient difficile alors on va faire un changement de variable.

Changement de variable

Soit D un domaine du plan et $\varphi:(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v))$ une bijection de $\mathcal{C}^1$ d'un domaine Δ du plan sur D.

On appelle Jacobien de φ et on note $J_\varphi=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ alors on a $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\int_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\,|J_\varphi|\,dy\,dx$

Exemple :

1. Passage en coordonnées polaires : $\varphi:(r,\theta)\mapsto(x(r,\theta),y(r,\theta))=(x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta)$

   $J_\varphi=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$ d'où $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\int_\Delta f(x(r,\theta),y(r,\theta))\,r\,dr\,d\theta$

   Revenons à notre exemple : On passe en coordonnées polaires on pose $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, $\Delta=\{(r,\theta) \text{ tq } 0\leqslant r\leqslant R \text{ et } 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ d'où $\int\int_D 1\cdot dx\,dy=\int\int_\Delta 1\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^R 1\cdot r\,dr\int_0^\pi 1\cdot d\theta=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R[\theta]_0^\pi=\frac{\pi R^2}{2}$

2. Utilisation des coordonnées elliptiques :

   - Calculer $J_1=\int\int_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}}$ où D est la partie du plan comprise entre les deux ellipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\lambda^2=0$ et $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\mu^2=0$ avec $1<\mu<\lambda$ et $a,b\in\mathbb{R}^*$. Deux ellipses de même forme, mais l'une plus grande que l'autre. Ça donne une ellipse pleine, mais trouée.

     On pose $\begin{cases}x=a\,r\cos\theta\\ y=b\,r\sin\theta\end{cases}$ $J_\varphi=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -r\,a\sin\theta\\ b\sin\theta & r\,b\cos\theta\end{vmatrix}\Rightarrow|J_\varphi|=a\,b\,r$, $\Delta=\{(r,\theta) \;\text{ tq }\; 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \text{ et } \mu\leqslant r\leqslant\lambda\}$
     D'où $J_1=\int\int_\Delta\frac{a\,b\,r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2-1}}=a\,b\int_\mu^\lambda\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}dr\int_0^{2\pi}d\theta=a\,b\,2\,\pi\left[\sqrt{r^2-1}\right]_\mu^\lambda=2\,\pi\,a\,b\left(\sqrt{\lambda^2-1}-\sqrt{\mu^2-1}\right)$

   - Calculer $J_2=\int\int_D(x^2-y^2)\,dx\,dy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\leqslant 0,\ a,b\in\mathbb{R}_+^*\right\}$. Ellipse remplie

     Changement de variable : utilisation des coordonnées elliptiques : $\begin{cases}x=a\,r\cos\theta\\ y=b\,r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow|J_\varphi|=a\,b\,r$. $D=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \;\text{ tq }\; 0\leqslant\theta\leqslant 2\,\pi \text{ et } 0\leqslant r\leqslant 1\}$.

     D'où $J_2=\int\int_D(x^2-y^2)\ dx\ dy=\int\int_\Delta(a^2\ r^2\ \cos^2\ \theta-b^2\ r^2\ \sin^2\ \theta)\ a\ b\ r\ dr\ d\theta=a\,b\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)\,d\theta=a\,b\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\,\theta}{2}\right)-\frac{b^2}{2}\left(\theta-\frac{\sin 2\,\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=\frac{a\,b}{4}\pi\,(a^2-b^2)$

Remarque : C'est le bloc $dx\,dy$ qui se transforme en $|J_\varphi|$, *pour les intégrales multiples*

Remarque : les formules de linéarisation sont à apprendre : $\cos^2\theta = \frac{1+\cos\theta}{2}\,;\sin^2\theta = \frac{1-\cos\theta}{2}$.

II. Les intégrales triples

II.1. Def

II.1. Def : On appelle compact élémentaire K, un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ tq si D est un compact de $\mathbb{R}^2$, il existe deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur D, ϕ_1, ϕ_2 tq $K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } (x,y)\in D \text{ et } \phi_1(x,y)\leqslant z\leqslant \phi_2(x,y)\}$ et on a dans ce cas $\int\int\int_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_D\left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dx\,dy$

II.2. Technique de calcul d'une intégrale triple

a) Intégrale sur un pavé : Soit $P = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } a\leqslant x\leqslant a',\ b\leqslant y\leqslant b' \text{ et } c\leqslant z\leqslant c'\}$.

Alors $\int\int\int_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^{a'}\left[\int_b^{b'}\left[\int_c^{c'} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right]dx$.

b) K est un compact élémentaire de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire $K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (x,y)\in D \text{ et } \phi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\phi_2(x,y)\}$ alors $\int\int\int_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_D\left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dx\,dy$

c) K est définipar $a\leqslant z\leqslant b$ et $(x,y)\in D(z)$ compact de $\mathbb{R}^2$ alors $\int\int\int_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left[\int\int_{D(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\right]dz$

Exemple : Calculer $\int\int\int_V z\,dx\,dy\,dz$ où $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ z\leqslant 1-y^2 \text{ et } x+y\leqslant 1\}$

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } 0\leqslant z\leqslant 1-y^2 \text{ et } (x,y)\in D \text{ où } D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ et } x+y\leqslant 1\}\right\}$$

$$\int\int\int_V z\,dx\,dy\,dz = \int\int_D\left[\int_0^{1-y^2} z\,dz\right]dx\,dy = \int\int_D \frac{(1-y^2)^2}{2}\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{(1-y^2)^2}{2}\,dy\right]dx = \cdots = \frac{11}{60}$$

II.3. Changement de variables

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $\phi : (u,v,w)\mapsto(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ d'un domaine Δ de $\mathbb{R}^3$ sur D, alors on a : $\int\int\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_\Delta f(x(u,v,w),y(\quad),z(\quad))\,|J_\varphi|\,du\,dv\,dw$ et $J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$.

Exemples :

Calculer $J = \int\int\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ où $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$

Passage en coordonnées sphériques : $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & r\geqslant 0\\ y = r\sin\theta\sin\varphi & 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ z = r\cos\theta & -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi\end{cases}$. $|J_\phi| = r^2\sin\theta$. Coordonnées qu'on a vues en physique

Dans notre cas $D = \{(r,\theta,\varphi) \text{ tq } 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ et } 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.

$$J = \int\int\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_\Delta r^2\times r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^1 r^4\,dr\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi = \frac{\pi}{10}$$

Remarque : Les coordonnées cylindriques sont obtenues en faisant le changement de variables : $\begin{cases} x = r\cos\theta & r\geqslant 0\\ y = r\sin\theta & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ z = z\end{cases}$

Exercices

Exercice 1. Calculer $I_1 = \int\int_D |x-y|\,dx\,dy$ où $D = [-1,1]^2$; $I_2 = \int\int_D \frac{x}{\sqrt{y}}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0<y\leqslant x\leqslant 1\}$; $I_3 = \int\int_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant x\leqslant y^2 \text{ et } y\in[0,1]\}$

- Il faut impérativement séparer l'intégrales pour la calculer sur deux domaines : $x<y$ et $x>y$.

  $D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\leqslant x\leqslant 1 \text{ et } -1\leqslant y\leqslant x\}$ et $D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\leqslant x\leqslant 1 \text{ et } x\leqslant y\leqslant 1\}$.

$I_1 = \int \int_{D_1} (x-y)\,dx\,dy + \int \int_{D_2} (y-x)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{x} (x-y)\,dy \right] dx + \int_{-1}^{1} \left[\int_{x}^{1} (y-x)\,dy \right] dx = \frac{8}{3}$

$I_1 = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} |x-y|\,dy \right] dx = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{x} (+x-y)\,dy + \int_{x}^{1} (-x+y)\,dy \right] dx = \int_{-1}^{1} \left[\left[\frac{-y^2}{2} \right]_{-1}^{x} + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x}^{1} \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [-x^2+1+1-x^2]\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$

- $I_2 = \int_0^1 x \left[\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y}} \right] dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} \sqrt{y} \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{1+\frac{3}{2}}}{1+\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$

- $I_3 =$

Exercice 2. Calculer $I = \int \int \int_D x^3\,y^2\,z^1\,dx\,dy\,dz$ où $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x\,y \right\}$.