Intégrales dépendant d'un paramètre

I.

L'objet du 1er paragraphe est l'étude de la fonction $F\colon \begin{matrix} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt \end{matrix}$ où J est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
On posera $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. Un fermé borné est un compact de $\mathbb{R}$.

I.1. Continuité

Théorème : Étant donnée $f\colon \begin{matrix} J\times I \to \mathbb{R} \\ (x,t)\mapsto f(x,t) \end{matrix}$

Si f est continue sur $J\times I$ alors, $F\colon \begin{matrix} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt \end{matrix}$ est continue sur J.

Démo : On va montrer que F et continue en un point quelconque $x_0\in J$

Pour cela il suffit de montrer que $\lim\limits_{h\to 0} F(x_0+h)=F(x_0)$.

Soit donc $x_0\in J$ $\quad F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^b f(x_0+h)\,dt-\int_a^b f(x_0,t)\,dt=\int_a^b (f(x_0+h)-f(x_0))\,dt$
D'où $|F(x_0+h)-F(x_0)|=\left|\int_a^b (f(x_0+h)-f(x_0))\,dt\right|\leqslant\int_a^b |f(x_0+h)-f(x_0)|\,dt$.
Or f est continue sur $J\times I\Rightarrow\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\mu>0\ \ /\ \ \forall x_0\in J,\ \forall\,h\in J$ avec $x_0+h\in J$ et $\forall\,t\in I\quad |h|<\mu\Rightarrow |f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$ d'où $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\mu>0,\ \forall\,x_0\in J,\ \forall\,h\in J$ avec $x_0+h\in J\quad |h|<\mu\Rightarrow|F(x_0+h)-F(x_0)|\leqslant\int_a^b|f(x_0+h)-f(x_0)|\,dt\leqslant\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}\,dt=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon\qquad\Rightarrow\qquad F$ est continue en x_0

Exemple : Soit $\varphi\colon \begin{matrix} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t\mapsto\varphi(t) \end{matrix}$ une fonction sur $[0,1]$ et soit $F\colon \begin{matrix} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x\mapsto\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{x-t}\,dt \end{matrix}$ où $J=[2,3]$

La fonction F est-elle continue sur J ?

On construit $f\colon \begin{matrix} J\times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t)\mapsto\frac{\varphi(t)}{x-t} \end{matrix}$ avec $\begin{matrix} J=[2,3] \\ I=[0,1] \end{matrix}\Rightarrow$ la fonction f est continue sur $J\times I$ comme rapport de deux fonctions et le dénominateur de f ne s'annule jamais car $x\in[2,3]$ et $t\in[0,1]$.
Le théorème implique que la fonction F définie par $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ est continue sur J.

I.2. Dérivabilité (dérivation sous le signe $\int$)

Théorème : Soient $I=[a,b]$ et $J=[c,d]$ deux intervalles réels fermés bornés

Soit $f\colon \begin{matrix} J\times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t)\mapsto f(x,t) \end{matrix}$ continue sur $J\times I$ admettant sur $J\times I$ une dérivée partielle première $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur $J\times I$, alors la fonction $F\colon \begin{matrix} J \longrightarrow R \\ x\mapsto\int_a^b f(x,t)\,dt \end{matrix}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et on a $\forall\,x\in J\quad F'(x)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Démo : Soit $x_0\in J$, x_0 fixé, $\forall\,h\in J$ avec $x_0+h\in J$. On va étudier $\Delta(h)=F(x_0+h)-F(x_0)-h\cdot\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$.

et on va montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta h}{h}=0\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}\left.\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\right|_{=F'(x)}=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$

$$\Delta h=F(x_0+h)-F(x_0)-h\cdot\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt=\int_a^b f(x_0+h,t)\,dt-\int_a^b f(x_0,t)\,dt-h\cdot\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$$
$$=\int_a^b\left[f(x_0+h,t)-f(x_0,t)-h\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right]dt.$$

Soit $g_t\colon \begin{matrix} [c,d] \longrightarrow \mathbb{R} \\ h\mapsto f(x_0+h,t)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \end{matrix}\quad ;\quad g_t(0)=f(x_0,t)$.
D'où $\Delta(h)=\int_a^b[g_t(h)-g_t(0)]\,dt$ comme f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $J\times I\Rightarrow g_t$ est continue sur J.
De plus $\forall\,h\in J=[c,d]\quad g_t'(h)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,t)\cdot 1-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$ $\qquad\frac{\partial x}{\partial h}=\frac{\partial(x_0+h)}{\partial h}=1$
Or la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $J\times I$ qui est un compact de $\mathbb{R}^2$, donc elle est uniformément continue sur $J\times I$ (c'est un théorème qu'on est censé avoir vu) d'où $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\mu>0\ \ /\ \ \begin{matrix}\forall\,x,x'\in J \\ \forall\,t,t'\in I\end{matrix}\quad \mathrm{Sup}(|x-x'|,|t-t'|)<\mu\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x',t')-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

Appliquons ceci à notre cas : $\forall \varepsilon>0, \exists \mu>0 \;/\; \begin{array}{l}\forall x_0 \in J \\ \forall h \in J\end{array}, \forall t \in I$ si $|h|<\mu \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

Ainsi si la fonction g_t qui est continue sur J, est dérivable et à dérivée bornée sur $]-\mu,\mu[$ donc elle vérifie l'inégalité des accroissements finis, c'est à dire $|g_t(h)-g_t(0)| \leqslant |h| \cdot \sup_{h\in]-\mu,\mu[} |g_t'(h)| \leqslant |h| \frac{\varepsilon}{b-a}$

D'où $\forall \varepsilon>0, \exists \mu>0 \;/\; \begin{array}{l}\forall x_0 \in J \\ \forall h \in J\end{array}, \forall t \in I$ si $|h|<\mu \Rightarrow |g_t(h)-g_t(0)|<|h| \frac{\varepsilon}{b-a}$

D'où $\forall \varepsilon>0, \exists \mu>0 \;/\; \begin{array}{l}\forall x_0 \in J \\ \forall h \in J\end{array}, \forall t \in I$ si $|h|<\mu \Rightarrow |\Delta h| \leqslant \int_a^b \left|f(x_0+h,t)-f(x_0,t)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| dt$
$\leqslant \int_a^b |h| \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon(h)$.

Ainsi $\forall \varepsilon>0, \exists \mu>0 \;/\; \begin{array}{l}\forall x_0 \in J \\ \forall h \in J\end{array}, \forall t \in I$ si $|h|<\mu \Rightarrow \displaystyle\int_a^b \left|\frac{f(x_0+h,t)-f(x_0,t)}{h}-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \mu>0 \;/\; \begin{array}{l}\forall x_0 \in J \\ \forall h \in J\end{array}, \forall t \in I$ si $|h|<\mu \Rightarrow \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \varepsilon$.

C'est la définition de la dérivée de F en x_0 et on a $F'(x_0)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$.

Exemple d'application : Soit $F: \begin{array}{l} J=[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x)=\int_1^2 t^x\,dt\end{array}$. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in J$.

On considère $f: \begin{array}{l} J\times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto t^x = e^{x\ln t}\end{array}$ avec $J=[0,1]$ et $I=[1,2]$.

On a f continue sur $J\times I$, de plus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\ln t\; e^{x\ln t}$; $\frac{\mathrm{d} f}{\partial x}$ est continue sur $J \times I$.

Le théorème implique que F est définie sur J par $F(x)=\int_1^2 f(x,t)\,dt$ est dérivable et on a
$\forall x \in J \quad F'(x)=\int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt=\int_1^2 t^x \ln t\;dt$. (1)

Remarque : $F(x)=\int_1^2 t^x\,dt=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_1^2 \Rightarrow F(x)=\frac{2^{x+1}-1}{x+1}=\frac{e^{(x+1)\ln 2}-1}{x+1}$ d'où $F'(x)=\frac{2^{x+1}\ln 2}{x+1}-\frac{2^{x+1}-1}{(x+1)^2}$ (2)

(1)=(2) $\Rightarrow \int_1^2 t^x \ln t\;dt=\frac{2^{x+1}\ln 2}{x+1}-\frac{2^{x+1}-1}{(x+1)^2}$

I.3. Intégration

Théorème : Soit $I=[a,b]$; $J=[c,d]$ deux intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$

$f: \begin{array}{l} J\times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto f(x,t)\end{array}$ une fonction continue sur $J \times I$, alors la fonction $F: \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt\end{array}$ est continue sur J donc elle est intégrable sur J et on a $\int_c^d f(x)\,dx=\displaystyle\int_c^d \left[\int_a^b f(x,t)\,dt\right] dx=\int_a^b \left[\int_c^d f(x,t)\,dx\right] dt$.

Rappel : Soit la fonction $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$; si g est continue alors :
- G est continue et dérivable
- $G'(x)=g(x)$.

Démo : Posons $\phi(x)=\displaystyle\int_a^b \left[\int_c^x f(X,t)\,dX\right] dt$; $\psi(x)=\displaystyle\int_c^x \left[\int_a^b f(X,t)\,dt\right] dX$

On a $\psi(x)=\displaystyle\int_c^x \left[\int_a^b f(X,t)\,dt\right] dX=\int_c^x g_1(X)\,dX$ où $g_1(X)=\int_a^b f(X,t)\,dt$

Puisque f est continue alors g_1 est continue par application du théorème I.1.

$\Rightarrow \psi'(x)=g_1(x) \overset{\text{rappel}}{\Rightarrow} \psi'(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$.

D'autre part $\phi(x)=\displaystyle\int_a^b \left[\int_c^x f(X,t)\,dX\right] dt=\int_a^b g_2(x,t)\,dt$ où $g_2(x,t)=\int_c^x f(X,t)\,dX$; $\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,t)\underset{\text{continue}}{=}f(x,t)$

On a $\phi'(x)=\int_a^b \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,t)\,dt=\int_a^b f(x,t)\,dt$.

Donc $\phi'(x)=\psi'(x)$ et puisque $\phi(c)=\psi(c)=0 \Rightarrow \phi=\psi \Rightarrow \phi(d)=\psi(d)$

c'est à dire $\displaystyle\int_c^d \left[\int_a^b f(X,t)\,dt\right] dX=\int_a^b \left[\int_c^d f(X,t)\,dX\right] dt$

Exemple : Soit $F: \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_1^2 x^2 \ln y\; dy\end{array}$. Calculer $\int_0^1 F(x)\,dx$.

Soit $f: \begin{array}{l} J\times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 \ln y\end{array}$ avec $J=[0,1]$ et $I=[1,2]$.

On a f continue sur $J\times I\Rightarrow F(x)=\int_1^2 f(x,y)\,dy$ est intégrable sur J et on a $\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1\left[\int_1^2 f(x,y)\,dy\right]dx=\int_1^2\left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right]dy$. Or $\int_1^2\left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right]dy=\int_1^2 \ln y\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)dy=\int_1^2 \ln y\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy$ $=\frac{1}{3}\int_1^2 \ln y\,dy=\frac{1}{3}[y\ln y-y]_1^2=\frac{2\ln 2-1}{3}$ et $\int_0^1\left[\int_1^2 f(x,y)\,dy\right]dx=\int_0^1 x^2\left[\int_1^2 \ln y\,dy\right]dx=\int_0^1 x^2[y\ln y-y]_1^2\,dx=\int_0^1 x^2(2\ln 2-2+1)\,dx=(2\ln 2-1)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2\ln 2-1}{3}$

II. Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Def : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $a<b$ avec $a\geqslant-\infty$ et $b\leqslant+\infty$ et $f:I\times]a,b[\to\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout $x\in I$ la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est localement intégrable sur $]a,b[$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x,t)\,dt$ converge normalement sur $I\times]a,b[$ s'il existe une fonction positive $g:]a,b[\to\mathbb{R}$ localement intégrable sur $]a,b[$ qui est telle que
$\forall x\in I,\ \forall t\in]a,b[\quad |f(x,t)|\leqslant g(t)$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ converge

Théorème : Soit I un intervalle réel, soient $a<b$ avec $a\geqslant-\infty$ et $b\leqslant+\infty$ et soit $f:I\times]a,b[\to\mathbb{R}$

Soit f continue sur $I\times]a,b[$.
On suppose que $\int_a^b f(x,t)\,dt$ converge normalement sur tout $[\alpha,\beta]\times]a,b[$ où $[\alpha,\beta]\subset I$.

Alors la fonction $F:\begin{array}{c} I\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\mapsto F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt\end{array}$ est continue sur I.

Exemple d'application : Montrer que la fonction $F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$

Soit $f:\begin{array}{c}\mathbb{R}\times[0,+\infty[\to\mathbb{R}\\ (x,t)\mapsto f(x,t)=e^{-t^2}\cos(xt)\end{array}$ et $F:\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt\end{array}$

On a :

1. f est continue sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues.

2. Soit $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ et montrons que $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ est normalement convergente sur $[\alpha,\beta]\times[0,+\infty[$

   En effet $\forall x\in[\alpha,\beta],\ \forall t\in[0,+\infty[\quad |f(x,t)|=\left|e^{-t^2}\cos(xt)\right|\leqslant e^{-t^2}\equiv g(t)$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge car la fonction $g:t\mapsto e^{-t^2}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ de plus $t^2e^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0=\underset{V(+\infty)}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\underset{\text{éviter } 0}{\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}}$ converge $\Rightarrow\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Conclusion : F est continue sur $\mathbb{R}$

Théorème : Soit $f:]\alpha,\beta[\times]a,b[\to\mathbb{R}$ avec $a\geqslant-\infty$ et $b\leqslant+\infty$, une fonction continue sur $]\alpha,\beta[\times]a,+\infty[$.

i. $\forall x\in]\alpha,\beta[\quad\int_a^b f(x,t)\,dt$ converge

ii. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe et est continue sur $]\alpha,\beta[\times]a,b[$

iii. $\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge normalement sur $[\alpha_1,\beta_1]\times]a,b[$ où $[\alpha_1,\beta_1]\subset]\alpha,\beta[$

Alors la fonction $F:]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et pour tout $x\in]\alpha,\beta[$, on a $F'(x)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

Exemple d'application :

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ les intégrales $\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}}_{=I}$ et $\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}|\ln t|^n t^{x-1}}_{=J}$ sont convergentes

2. Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.
   Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}|\ln t|^n t^{x-1}\,dt$

1. $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{(x-1)\ln t}dt=\int_0^1 e^{-t}e^{(x-1)\ln t}\,dt+\int_1^{+\infty} e^{-t}e^{(x-1)\ln t}\,dt$

Étude au V(0) : $t \mapsto e^{-t}\, e^{(x-1)\ln t} = e^{-t}\, t^{x-1}$ est continue positive sur $]0,1]$
$e^{-t} t^{x-1} \underset{V(0)}{\sim} 1 \cdot t^{x-1}$ or $\int_0^1 t^{x-1}\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge ssi $1-x<1$ c'est à dire $x>0$.

Donc $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Étude au V($+\infty$) : $t \mapsto e^{-t}\, e^{(x-1)\ln t} = e^{-t} t^{x-1}$ est continue positive sur $[1,+\infty[$.
$t^2 e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} t^{x+1} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow e^{-t} t^{x-1} = \underset{V(+\infty)}{\circ}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$ converge

Donc I converge.

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1}\, dt = \int_0^1 e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1}\, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1}\, dt$

Étude au V(0) : $t \mapsto e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1}$ est continue positive sur $]0,1]$
On a $e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1} \underset{V(0)}{\sim} |\ln t|\, t^{x-1}$.
$t^a\, |\ln t|^n\, t^{x-1} = |\ln t|^n\, t^{a+x-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ si $a+x-1>0 \Rightarrow a>1-x$.
Dans ces conditions on aura $|\ln t|^n\, t^{x-1} = \underset{V(0)}{\circ}\left(\frac{1}{t^a}\right)$ or $\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$ converge si $a<1$.
a doit vérifier $1-x<a<1$. Il suffit de choisir $a = 1-\frac{x}{2} \Rightarrow \int_0^1 e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1}\, dt$ converge.

Étude au V($+\infty$) : $t \mapsto e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1}$ est continue positive sur $[1,+\infty[$.
$t^2 e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1} = e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1}\, dt$ converge

Donc J converge.

2. Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

Étudions la dérivabilité de la fonction Γ :

Soit $f: \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) = e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} e^{(x-1)\ln t} \end{array}$

Vérifions les hypothèses du théorème II.2 : On a f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

i. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$ converge par 1°)

ii. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t} \ln t\; e^{(x-1)\ln t} = e^{-t} \ln t\; t^{x-1}$.
Remarque : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = e^{-t} (\ln t)^2\, t^{x-1} \Rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = e^{-t} (\ln t)^n\, t^{x-1}$
$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ existe et est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

iii. Soit $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ tq $0<\alpha_1<\beta_1$ $(\Rightarrow [\alpha_1, \beta_1] \subset \mathbb{R}_+^*)$; pour tout $x \in [\alpha_1, \beta_1]$ on a :

- si $t \in\,]0,1]$ alors $\ln t \leqslant 0$ et $x-1 \geqslant \alpha_1 - 1 \Rightarrow (x-1) \ln t \leqslant (\alpha_1 - 1) \ln t \Rightarrow$ $e^{-t}\, |\ln t|^n\, e^{(x-1)\ln t} \leqslant e^{-t}\, |\ln t|^n\, e^{(\alpha_1-1)\ln t} \Rightarrow \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant e^{-t} |\ln t|\, t^{\alpha_1 - 1}$

- si $t \in [1,+\infty[$ alors $\ln t \geqslant 0$ et $x-1<\beta_1-1 \Rightarrow (x-1)\ln t \leqslant (\beta_1-1)\ln t \Rightarrow$ $e^{-t}\, |\ln t|^n\, e^{(x-1)\ln t} \leqslant e^{-t}\, |\ln t|^n\, e^{(\beta_1-1)\ln t} \Rightarrow \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t\right| \leqslant e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{\beta_1-1}$

D'où $\forall x \in [\alpha_1, \beta_1] \subset \mathbb{R}_+^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}\, |\ln t|\, \underbrace{\left(t^{\alpha_1-1} + t^{\beta_1-1}\right)}_{=g(t)}$ or $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, |\ln t|^n \left(t^{a_1+1} + t^{\beta_1+1}\right) dt$ converge car somme de deux intégrales convergentes puisque $\alpha_1>0$ et $\beta_1>0$ donc la fonction $\Gamma: \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \end{array}$ est dérivable à n'importe quel ordre et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t\; t^{x-1}\, dt$ et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, |\ln t|^n\, t^{x-1}\, dt$