Intégrales généralisées

Def :

On dit que f fonction réelle définie sur un intervalle réel $I \subset \mathbb{R}$ est localement intégrable sur I si pour tout intervalle fermé $[\alpha, \beta] \subset I$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f est intégrable au sens de Riemann sur $[\alpha, \beta]$.

En particulier si f est continue sur I alors, f est localement intégrable sur I.

Dans la suite on prend $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Soit $F\colon \begin{array}{l} [a,b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$.

I. Def : L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ existe ou converge ssi $\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\lim\limits_{x \to b} F(x) = l$

Remarque :

1. Quand l'intégrale généralisée converge on note $\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt$
2. La notion de convergence ou de divergence de $\int_a^b f(t)\,dt$ est indépendante du choix de x de la borde inférieure, c'est à dire $\int_a^b f(t)\,dt$ est de même nature que $\int_{a'}^b f(t)\,dt$ pour tout $a' \in]a, b[$.
3. De la même manière on définit la nature de $\int_a^b f(t)\,dt$ pour f continue sur $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$
4. Dans le cas particulier où f est continue sur $[a, b[$ et f est prolongeable par continuité en $b \in \mathbb{R}$ $\Big($c'est à dire que $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe$\Big)$ alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente

Exemple : Soit $f\colon \begin{array}{l} [-1, 0[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\sin t}{t} \end{array}$. Donner la nature de $\int_{-1}^0 \frac{\sin t}{t}\,dt$

La fonction f est prolongeable par continuité en g sur $[-1, 0]$ en posant $\begin{cases} g(t) = f(t) \text{ si } t \in [-1, 0[\\ g(0) = 1 \end{cases}$.

La fonction g est continue sur $[-1, 0] \Rightarrow \int_{-1}^0 g(t)\,dt$ existe mais $\int_{-1}^0 f(t)\,dt = \int_{-1}^0 g(t)\,dt \Rightarrow \int_{-1}^0 f(t)\,dt$ existe.

II. Exemple fondamentale : Intégrales de Riemann

1er cas : Soit $a > 0$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ $\nearrow$ converge ssi $\alpha > 1$, $\searrow$ diverge ssi $\alpha \leqslant 1$

Démo : On considère la fonction $f\colon \begin{array}{l} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha} \end{array}$; $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Considérons $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ c'est à dire $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_a^x t^{-\alpha}\,dt$

D'où : si $\alpha = 1$ alors $F(x) = [\ln t]_a^x = \ln x - \ln a \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge

si $\alpha \neq 1$ alors $F(x) = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^x = \frac{1}{-\alpha+1}\left(x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right)$ $\nearrow 0$ si $1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge, $\searrow +\infty$ si $1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge

2ème cas : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ $\nearrow$ converge ssi $\alpha < 1$, $\searrow$ diverge ssi $\alpha \geqslant 1$

Démo : On considère la fonction $f\colon \begin{array}{l} [a, b[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha} \end{array}$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \int_a^x (b-t)^\alpha\,dt$

D'où : si $\alpha = 1$ alors $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-t} = [-\ln(b-t)]_a^x = -(\ln(b-x) - \ln(b-a)) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \int_a^b \frac{dt}{b-t}$ diverge

si $\alpha \neq 1$ alors $F(x) = \left[\frac{1}{-\alpha+1}(b-t)^{-\alpha+1}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\Big((b-x)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\Big)$

$\underset{x \to b^-}{\longrightarrow}$ $\nearrow -\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $1 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1 \Rightarrow \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge

$\searrow \infty$ si $1 - \alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1 \Rightarrow \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ diverge

Remarque :

1. Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b[$ alors $\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ on a :
$\int_a^b(\lambda f+\mu g)\,dt=\lambda\int_a^b f(t)\,dt+\mu\int_a^b g(t)\,dt$ *linéarité de l'intégrale*

2. Si f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b[$ alors on n'a pas toujours $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ intégrable sur $[a,b[$.

Exemple : Soit $f:\begin{array}{l}[0,1[\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-t}}\end{array}$ on a $\int_0^1 f(t)\,dt=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t}}=\int_a^b\frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$ converge $\left(\text{intégrale de Riemann avec }\alpha=\frac{1}{2}\right)$

mais $\int_0^1 f(t)\times f(t)\,dt=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1-t}=\int_0^1\frac{dt}{(1-t)^1}$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha=1$)

III. Calcul pratique des intégrales généralisées

III.1. Utilisation d'une primitive

Soit $f:\begin{array}{l}[a,b[\to\mathbb{R}\\ t\mapsto f(t)\end{array}$ et on veut connaître la nature de $\int_a^b f(t)\,dt$.

Si on peut déterminerune primitive $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ alors il suffit de regarder $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$

Exemple : Nature de $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}$; $\beta\in\mathbb{R}$

On cherche une primitive $F(x)=\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}$.

Si $\beta=1$: $F(x)=\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{t\ln t}=\int_2^x\frac{(\ln t)'}{\ln t}\,dt=[\ln(\ln t)]_2^x=\ln(\ln x))-\ln(\ln 2)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\Rightarrow\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\ln t}$ diverge

Si $\beta\neq 1$: $F(x)=\int_2^x(\ln t)'(\ln t)^{-\beta}dt=\left[\frac{1}{-\beta+1}(\ln t)^{-\beta+1}\right]_2^x$

$$=\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln t)^{\beta-1}}-\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}\nearrow 0\text{ ssi }\beta-1>0\Rightarrow\beta>1\Rightarrow\text{ convergence}\\ \searrow\infty\text{ ssi }\beta-1<0\Rightarrow\beta<1\Rightarrow\text{ divergence}\end{cases}$$

Conclusion : $\displaystyle\int_2^x\frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}$ converge ssi $\beta>1$

III.2. Méthode du changement de variable

On reprend l'exemple précédent : Nature de $I=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}$; $\beta\in\mathbb{R}$.

On pose $T=\ln t\Rightarrow dT=\frac{dt}{t}$. D'où $I=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dT}{T^\beta}$ converge ssi $\beta>1$.

III.3. Méthode d'intégration par parties

Théorème : Soient u et v deux fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$

Alors $\forall x\in[a,b[$ $\int_a^x u(t)\,v'(t)\,dt=[u(t)\,v(t)]_a^x-\int_a^x u'(t)\,v(t)\,dt$ **et ces deux dernières intégrales sont de même nature.**

Exemple : Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}dt$ sont de même nature.

On fait une intégration par parties sur $[1,x]$ d'où : $\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_1^x(1-\cos t)'\cdot\frac{1}{t}\,dt$. On peut rajouter la constante 1 qui ne change pas l'égalité mais qui simplifie les calculs par la suite.

$\int_1^x(1-\cos t)'\cdot\frac{1}{t}\,dt=\left[(1-\cos t)\,\frac{1}{t}\right]_1^x+\displaystyle\int_1^x\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt=\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x+2\int_1^x\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\,dt$. On pose: $T=\frac{t}{2}\Rightarrow dT=\frac{dt}{2}$

D'où $\displaystyle\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,dt=\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x+\cancel{2}\times 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{2}}\frac{\sin^2 T}{\cancel{4}T^2}\,dT$.

D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)+1-\cos 1+\lim_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{2}}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.

D'où $\displaystyle\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt}_{=I_1}=0+1-\cos 1+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt}_{=I_2}\Rightarrow I_1$ et I_2 sont de même nature.

IV. Intégrales doublement généralisées

Def : Soit f continue sur $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge ssi $\exists\, c \in]a,b[$ tq $\underbrace{\int_a^c f(t)\,dt}_{=I}$ converge et $\underbrace{\int_c^b f(t)\,dt}_{=J}$ converge.

Remarque : Si l'une au moins des intégrales I et J diverge alors $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

Exemple :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$; Soit $c \in]-\infty;+\infty[$; $\int_{-\infty}^{c} t\,dt$ et $\int_c^{+\infty} t\,dt$ divergent $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge.

   Remarque : $\forall x \geqslant 0 \quad F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-x}^{x} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$
   Ceci n'a pas de sens !!!

2. Soit $I = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t}$; nature de I.

   Il ne faut pas écrire $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t} = [\ln(1+t)]_{-1}^{1} = 0$. Ceci n'est pas acceptable car f n'est pas continue sur $[-1,1]$
   On a f continue sur $[-1,0[\bigcup]0,1]$ c'est pourquoi il faut étudier séparément $\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t}$, or ces deux intégrales divergent $\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t}$ diverge.

V. Convergence des intégrales de $f \geqslant 0$ sur $[a,b[$

Soit f continue sur $[a,b[$ et $f \geqslant 0$ sur $[a,b[$.
On définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [a,b[$.
On a $F'(x) = f(x)$ et comme $f \geqslant 0 \Rightarrow F$ est croissante sur $[a,b[$ donc $\int_a^b f(t)\,dt$ converge ssi $\{F(x), x \in [a,b[\}$ est un ensemble de réels majorés.

Remarque : $F([a,b[) = \left\{ \int_a^x f(t)\,dt, \text{ pour } x \in [a,b[\right\} = \{F(x),\ x \in [a,b[\}$.

Théorème :

1. S'il existe $g \geqslant 0$ continue sur $[a,b[$ tq $f = \underset{V(b)}{\circ}(g)$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
2. S'il existe $g \geqslant 0$ continue sur $[a,b[$ tq $f \underset{V(b)}{\sim} g$ alors $\int_a^b g(t)\,dt$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.
3. S'il existe g continue sur $[a,b[$ tq $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ alors : si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
   si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Démo :

1. Si on a f et g deux fonctions positives continues sur $[a,b[$ et $f = \underset{V(b)}{\circ}(g)$, donc par définition on sait que $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V(b)$ tq $\forall\, x \in V(b),\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon\, g(x)$.
   Soit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\,dt = \varepsilon\, G(x)$.
   Puisque $\int_a^b g(t)\,dt$ converge $\Rightarrow \underbrace{\{G(x),\ x \in [a,b[\}}_{=G([a,b[)}$ est un ensemble de réels majorés.
   D'où $F([a,b[)$ est un ensemble de réels majorés $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Exemple : Nature de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3t+1}{(t^4+3t^2+1)\sqrt{t}}\,dt$; $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^3 e^{-t}}{1+3t}\,dt$

Soit $f(t) = \frac{3t+1}{(t^4+3t^2+1)\sqrt{t}}$; f est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{3t}{t^4\sqrt{t}} = \frac{3}{t^{\frac{7}{2}}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{t^{\frac{7}{2}}}\,dt$ est une intégrale de Riemann $\left(\alpha = \frac{7}{2}\right)$ converge $\Rightarrow I$ converge.

Soit $f(t) = \frac{t^3 e^{-t}}{1+3t}$; f est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et $f(t) \sim \frac{t^3 e^{-t}}{3t} = \frac{t^2 e^{-t}}{3} = g(t)$.
Or $t^2 \cdot \frac{t^2 e^{-t}}{3} = \frac{t^4 e^{-t}}{3} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \frac{t^2 e^{-t}}{3} = \underset{V(+\infty)}{\circ}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge $\Rightarrow J$ converge

Attention : f doit avoir un signe constant !

Soit $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ converge (on l'admet pour le moment, on va le montrer au § suivant).

Soit $g(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}+\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2\,t}-\frac{\cos(2\,t)}{2\,t}$ $\left(\sin^2 t=\frac{1-\cos(2\,t)}{2}\right)$

$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{2\,t}$ diverge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{\frac{\sin t}{\sqrt{t}}}{\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)}=\frac{1}{1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}1\Rightarrow f(t)\underset{V(+\infty)}{\sim}g(t)$ et pourtant $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

VI. Critère de Cauchy - Absolue et semi-convergence

VI.1. Critère de Cauchy

Étant donnée f continue sur $[a,b[$ $(-\infty<a<b\leqslant+\infty)$ une CNS pour que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge est quelle vérifie le critère de Cauchy, c'est à dire $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,c\in[a,b[$ tq $\forall\,x',x''\in[c,b[$ $\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right|<\varepsilon$.

VI.2. Absolue convergence

Def : Soit f continue sur $[a,b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite absolument convergente ssi $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge

Théorème : Toute intégrale absolument convergente, converge et on a $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^b|f(t)|\,dt$

Démo :

Soit f continue sur $[a,b[$ si $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente et on a donc $\int_a^b|f(t)|\,dt$ converge donc vérifie le critère de Cauchy, c'est à dire $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,c\in[a,b[$ tq $\forall\,x',x''\in[c,b[$ $\left|\int_{x'}^{x''}|f(t)|\,dt\right|<\varepsilon$.

Or on sait que $\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right|\leqslant\int_{x'}^{x''}|f(t)|\,dt$, d'où $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,c\in[a,b[$ tq $\forall\,x',x''\in[c,b[$ $\left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right|\leqslant\int_{x'}^{x''}|f(t)|\,dt<\varepsilon\Rightarrow\int_a^b f(t)\,dt$ vérifie le critère de Cauchy $\Rightarrow\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

VI.3. Semi convergence

Def : Une intégrale impropre ou généralisée convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

Exemple : Étudier $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^n}\,dx$ où $n\in\mathbb{R}_+^*$; $f:\begin{array}{l}[1,+\infty[\to\mathbb{C}\\ x\mapsto\frac{e^{ix}}{x^n}\end{array}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$|f(x)|=\frac{|e^{ix}|}{x^n}=\frac{1}{x^n}$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ converge ssi $n>1\Rightarrow I$ est absolument convergente pour $n>1$.

Si $0<n\leqslant1$ alors on sait qu'il n'y a pas de convergence absolue. Est-ce que I est semi-converte ? On va faire une intégration par parties en posant $u'=e^{ix}\Rightarrow u=\frac{1}{i}e^{ix}=-i\,e^{ix}$ et en travaillant sur $[1,X]$.

D'où $\int_1^X e^{ix}x^{-n}\,dx=\left[-i\frac{e^{ix}}{x^n}\right]_1^X-i\,n\int_1^x\frac{e^{ix}}{x^{n+1}}\,dx\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^n}\,dx=i\,e^i-i\,n\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^{n+1}}\,dx}_{\text{CV car } n+1>1}\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^n}\,dx$ CV

Si $X\to+\infty$ alors $\frac{e^{iX}}{X}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0$ car $0\leqslant\left|\frac{e^{iX}}{X}\right|=\frac{1}{X}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0$

Conclusion : si $0<n\leqslant1$ alors $\int_1^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^n}\,dx$ est semi convergente
si $n>1$ alors $\int_1^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^n}\,dx$ est absolument convergente

Remarque : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^n}\,dx$ converge, $\forall\,n\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^n}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^n}\,dx$ convergent $\forall\,n\in\mathbb{R}_+^*$

VI.4. Règle d'Abel

Théorème : Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ et $g:[a,b[\to\mathbb{R}$ des fonctions continues vérifiant :

i. f positive décroissante sur $[a,b[$ et $\lim\limits_{t\to b}f(t)=0$

ii. $\exists\,K\in\mathbb{R}_+^*$ tq $\forall\,u,v\in[a,b[$ $\left|\int_u^v g(t)\,dt\right|\leqslant K$

Alors $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ est convergente.

Démo :

Rappel du second théorème de la moyenne :

Étant données f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a',b']$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f positive décroissante sur $[a',b']$ alors $\exists\, c'\in[a',b']$ tq $\int_{a'}^{b'} f(t)\,g(t)\,dt = f(a')\int_{a'}^{c'} g(t)\,dt$.

On applique ce théorème aux deux fonctions f et g du théorème d'Abel sur $[a,\,x']$ d'où $\exists\, c\in[a,\,x']$ tq $\int_a^{x'} f(t)\,g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt$.

Soit $x\in[a,b[$ et $x<x'$ alors $\left|\int_x^{x'} f(t)\,g(t)\,dt\right| = \left|f(x)\int_x^c g(t)\,dt\right| \leqslant f(x)\,K$.
Or $\lim\limits_{x\to b} f(x)=0 \Rightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, V(b)$ tq $x\in V(b)$ alors $f(x)<\frac{\varepsilon}{K}$.
D'où $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, c\in[a,b[$ tq $\forall\, x,x'\in[a,b[$ $\left|\int_x^{x'} f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant f(x)\,K \leqslant \frac{\varepsilon}{K}K=\varepsilon \Rightarrow$ par le critère de Cauchy on déduit que $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ converge.

Exemple : Nature de $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$.

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\int_1^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt \text{ où } f:\begin{array}{l}[1,+\infty[\,\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\end{array} \text{ et } g:\begin{array}{l}[1,+\infty[\,\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \sin t\end{array}.$$

f et g sont continues, intégrables sur $[1,+\infty[$; f est positive décroissante sur $[1,+\infty[$; $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.
De plus $\exists\, K=2$ tq $\forall\, u,v\in[1,+\infty[$ $\left|\int_u^v g(t)\,dt\right| = \left|\int_u^v \sin t\,dt\right| = \left|[-\cos t]_u^v\right| \leqslant 2$.

D'après le théorème d'Abel on a $\int_1^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$ converge, c'est à dire $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ converge.

De la même manière on montre que $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin t}{\ln t}\,dt$ converge.

Théorème : Soit f positive sur $[a,+\infty[$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=l$ alors $l=0$.

Démo :

Supposons que $l>0$, c'est à dire $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=l \Rightarrow f(t)\underset{V(+\infty)}{\sim} l$ or $\int_a^{+\infty} l\,dt$ diverge $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge contrairement à l'hypothèse donc $l=0$.

Exercices faisant partie du cours

Exercice 1. Soit $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante tq $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

Montrer que $f(x)=\circ\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x\to+\infty$.

Démonstration. Puisque $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors elle vérifie le critère de Cauchy d'où :
$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, M>0,\ \forall\, x>M$ $\int_x^{2x} f(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$.
De plus f est décroissante d'où $\forall\, x>M$ $x\,f(2\,x)=\int_x^{2x} f(2\,x)\,dt\leqslant\int_x^{2x} f(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$ car $\forall\, t\in[x,2\,x]$ on a $f(2\,x)\leqslant f(t)$
Ainsi $0\leqslant x\,f(2\,x)<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow 0\leqslant 2\,x\,f(2\,x)<\varepsilon$.
On pose $X=2\,x\Rightarrow 0\leqslant X\,f(x)<\varepsilon$ pour tout $X>M\Rightarrow \lim\limits_{X\to+\infty} X\,f(X)=0$ donc $f(X)=\underset{V(+\infty)}{\circ}\left(\frac{1}{X}\right)$ □

Exercice 2. Nature de $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}\,dt$; $J=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}}-\cos\frac{1}{t}\right)dt$; $K=\int_0^1\frac{dt}{\ln t}$

Démonstration.

- $K=\int_0^1\frac{dt}{\ln t}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\ln t}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dt}{\ln t}=K_1+K_2$.
  - $f_1:t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ continue sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$; de plus $\lim\limits_{t\to0} f_1(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{\ln t}=0$
    Donc f_1 est prolongeable en $t=0\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}} f_1(t)\,dt$ converge
  - $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$; négative sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$ de plus $\frac{1}{\ln t}\underset{V(1)}{\sim}1$

- $I=\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\,dt=I_1+I_2$

  Étude au $V(0)$: $f:t\mapsto\frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}$. $\quad |f(t)|\leqslant\frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)}=g(t)\underset{V(0)}{\sim}\frac{\sqrt{t}}{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}$
  Or $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ converge $\Rightarrow \int_0^1 g(t)\,dt$ converge $\Rightarrow \int_0^1 |f(t)|\,dt$ converge $\Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$ converge absolument donc I_1 converge.

  Étude au $V(+\infty)$: $\frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\underset{V(+\infty)}{\sim}\frac{\sqrt{t}\cdot\frac{1}{t^2}}{\ln t}=\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}\ln t}$
  $t\mapsto\frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}$ est continue positive sur $[1,+\infty[$.
  On compare à $\frac{1}{t^\alpha}$: $\frac{t^\alpha}{t^{\frac{3}{2}}\ln t}=\frac{1}{t^{\frac{3}{2}-\alpha}\ln t}\underset{V(+\infty)}{\longrightarrow}0$. Si $\frac{3}{2}-\alpha>0\Rightarrow\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}\ln t}=\underset{V(+\infty)}{\circ}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$. Or $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha>1$. On prend $\alpha=\frac{5}{4}$ afin d'avoir $1<\alpha<\frac{3}{2}$. Par conséquent $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}dt=I_2$ converge.

  Conclusion : I_1 et I_2 convergent donc I converge. □

On retrouve l'intégrale K dans le TD n°15, exercice 2, question a).