Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

I. Éléments propres

Def :

1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$

   - Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une valeur propre de f ssi :
     $\exists\, x \in E \;\; ; \;\; x \neq 0 \;\;$ tq $\;\; f(x) = \lambda\, x$
     On appelle spectre de f et on note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

   - Soit $x \in E$, on dit que x est un vecteur propre de f ssi :
     $x \neq 0$ et $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\;f(x) = \lambda\, x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   - Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de A ssi :
     $\exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \;\; X \neq 0 \;\;$ tq $\;\; A\,X = \lambda\, X$
     On appelle spectre de A et on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

   - Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; On dit que X est un vecteur propre de A ssi :
     $X \neq 0$ et $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\;A\,X = \lambda\, X$

Les valeurs propres et vecteurs propres sont globalement appelés éléments propres.

Remarque :

- Un vecteur propre n'est jamais nul.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λ valeur propre de f, ssi λ est valeur propre de A $\quad (A = \mathcal{M}_B(f))$
  Donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$

Propriété et définition : Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ sont des valeur et vecteur propres associés ssi : $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda\, x$
- Pour toute valeur propre λ de f, le sous espace $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \neq \{0\} \Rightarrow f - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.
  On appelle $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)$ le sous espace propre associé à la valeur propre λ et on note E_λ.

Démo :

Soit λ valeur propre de f associée au vecteur propre x, alors on a :
$f(x) = \lambda\, x \Rightarrow f(x) - \lambda\, x = 0 \Rightarrow (f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E) \neq \{0\} \Rightarrow f - \lambda\, \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si $\lambda_1, \ldots\lambda_n$ toutes distinctes, sont les valeurs propres de f, alors les sous espaces associés à $\lambda_1, \ldots\lambda_n$ sont en somme directe.

Rappel : La somme $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ est directe ssi $\forall\, i \in [\![2, n]\!], \quad E_i \bigcap \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} E_j \right) = \{0\}$.

Preuve par récurrence :

Remarque : Le sous espace propre associé à la valeur propre λ_i, sera noté dans cette preuve E_i $(E_{\lambda_i} \equiv E_i)$

- $n = 2$: $E_1 + E_2$ est-elle directe ? C'est à dire $E_1 \bigcap E_2 = \{0\}$
  Soit $x \in E_1 \bigcap E_2$ alors $\left.\begin{array}{r} x \in E_1 \Rightarrow f(x) = \lambda_1\, x \\ \text{et } x \in E_2 \Rightarrow f(x) = \lambda_2\, x \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \lambda_1\, x - \lambda_2\, x = (\lambda_1 - \lambda_2)\, x.$
  Or $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow E_1 \bigcap E_2 = \{0\}$. Donc la somme $E_1 + E_2$ est directe. On note $E_1 \oplus E_2$.

- Supposons que la propriété est établie jusqu'au rang $n-1$, c'est à dire $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_{n-1} \equiv \bigoplus_{i=1}^{n-1} E_i$.

  On a $\bigoplus_{i=1}^{n-1} E_i$ directe donc $\Leftrightarrow \forall i \in [\![2, n-1]\!] \quad E_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$

  Pour avoir $\sum_{i=1}^{n} E_i$ directe il suffit de montrer que $E_n \bigcap \sum_{j=1}^{n-1} E_j = \{0\}$.

  Soit $x \in E_n \bigcap \sum_{j=1}^{n-1} E_j \Rightarrow \begin{cases} x \in E \\ \text{et } x \in \sum_{j=1}^{n-1} E_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \lambda_n x \\ \exists (x_j)_{j \in [\![1, n-1]\!]} \text{ tq } x = \sum_{j=1}^{n-1} x_j \\ \quad \text{avec } x_j \in E_j \end{cases} \Rightarrow$
  $\begin{cases} f(x) = \lambda_n x \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_n x_j = \lambda_n x = \lambda_n \sum_{j=1}^{n-1} x_j \\ f(x) = \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j \end{cases}$, d'où $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j - \lambda_n \sum_{j=1}^{n-1} x_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n) x_j = 0$.

  Puisque $\bigoplus_{j=1}^{n-1} E_j$ est directe $\Rightarrow$ décomposition unique de $0 = 0 + \cdots + 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n-1]\!] \ (\lambda_j - \lambda_n) x_j = 0$
  $\Rightarrow x_j = 0 \Rightarrow x = 0$.

  Donc la propriété est établie au rang n.

II. Polynome caractéristique

Def :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note $P_A(X)$ le déterminant de $(A - X I_n)$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de f et on note $P_f(X)$ le dérerminant de $\mathcal{M}(f - X \, \mathrm{Id}_E)$.

Remarques :

- La matrice identité d'ordre n sera notée I_n $\quad (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{I}_n X = X)$

- L'endomorphisme identité de E sera noté Id_E $\quad (\forall x \in E \quad \mathrm{Id}_E(x) = x)$

Proposition : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de plus on a
$P_A(X) = (-X)^n + X^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)}_{\text{trace de } A} + \cdots + \det(A)$.

En effet : Il suffit de développer $P_A(X) = \det(A - X I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$

En particulier on a P_A est un polynôme de degré n : $\det(A) = P_A(0) \Rightarrow$ le terme constant dans P_A est $\det(A)$.

Propriétés :

1. Deux matrices carrées semblables ont même polynôme caractéristique

2. A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique

Démo : `X est un scalaire`

1. Soit A et A' deux matrices semblables alors $\exists S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $A' = S^{-1} A S$
   $P_{A'}(X) = \det(A' - X \mathrm{I}_n) = \det(S^{-1} A S - X \mathrm{I}_n) = \det(S^{-1} A S - X S^{-1} \mathrm{I}_n S) = \det\big(S^{-1} (A - X \mathrm{I}_n) S\big) =$
   $\det(S^{-1}) \det(A - X \mathrm{I}_n) \det(S) = \det(S^{-1}) \det(S) \, P_A(X) = P_A(X)$

2. $P_A(X) = \det(A - X \mathrm{I}_n) = \det\big({}^t(A - X \mathrm{I}_n)\big) = \det\big({}^tA - X \, {}^t\mathrm{I}_n\big) = \det({}^tA - X \mathrm{I}_n) = P_{{}^tA}(X)$

Exemple : Calculer les éléments propres de A où $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}$.

$P_A(X) = \det(A - X\, I_n) = \begin{vmatrix} 8-X & 12 & 10 \\ -9 & -22-X & -22 \\ 9 & 18 & 17-X \end{vmatrix} = -X^3 + 3X^2 - 4 = -(X+1)(X-2)^2$

Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(X) \Rightarrow$ les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1$ (valeur simple) et $\lambda_2 = 2$ (valeur double).

Cherchons les sous espaces vectoriels associés aux valeurs propres :

- $\boldsymbol{E_{\lambda_1}}$: Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}$ ssi $A\,V = \lambda_1 V \Leftrightarrow A\,V = -V \Leftrightarrow (A+I)\,V = 0$

  $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 12 & 10 \\ -9 & -21 & -22 \\ 9 & 18 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 12y + 10z = 0 \\ -9x - 21y - 22z = 0 \\ 9x + 18y + 18z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = z \\ y = -\frac{4}{3}z \\ x = \frac{2}{3}z \end{cases}.$

  $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}$ ssi $V = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}z \\ -\frac{4}{3}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  $E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim E_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow E_{\lambda_1}$ est une droite vectorielle.

- $\boldsymbol{E_{\lambda_2}}$: $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow A\,V = 2\,V \Leftrightarrow (A - 2\,I)\,V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 12y + 10z = 0 \\ -9x - 24y - 22z = 0 \\ 9x + 18y + 15z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6y - 7z = 0 \\ 3x + 6y + 5z = 0 \end{cases}.$

  $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}$ ssi $V = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}z \\ \frac{-7}{6}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ donc E_{λ_2} est une droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) ; λ_0 une valeur propre de f (respectivement de A) :

On appelle ordre de multiplicité de λ_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 en tant que zéro du polynôme caractéristique $P_f(X)$ (respectivement $P_A(X)$).

Exemple : Dans l'exemple précédent on avait $P_A(X) = -(X+1)(X-2)^2$ alors : $\begin{array}{l} -1 \text{ est une valeur propre simple} \\ \ \ 2 \text{ est une valeur propre double} \end{array}$.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; λ_0 une valeur propre de f. ω_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 et $d_0 = \dim(f - \lambda_0 \mathrm{Id}_E)$.

On a alors : $1 \leqslant d_0 \leqslant \omega_0$.

Démo :

1. Puisque par définition le sous espace propre associé à λ_0 noté E_{λ_0} est différent de $\{0\}$ alors $\dim(f - \lambda_0 \mathrm{Id}_E) = \dim(E_{\lambda_0}) = d_0 \geqslant 1$

2. Le sous espace E_{λ_0} admet au moins une base $(e_1, \ldots, e_{d_0})$ et d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{d_0+1}, \ldots, e_n \in E$ tq $B = (e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

   Il existe $C \in \mathcal{M}_{d_0, n-d_0}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-d_0}(\mathbb{K})$ tq $\mathcal{M}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \mathrm{I}_{d_0} & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

   D'où $P_f(X) = \begin{vmatrix} (\lambda_0 - X)\,\mathrm{I}_{d_0} & C \\ 0 & B - X\,\mathrm{I}_{d_0} \end{vmatrix} = (\lambda_0 - X)^{d_0} P_B(X)$ car pour $d_0 = 2$: $\begin{vmatrix} \lambda_0 - X & 0 \\ 0 & \lambda_0 - X \end{vmatrix} = (\lambda_0 - X)^2$

   D'où $P_f(X) = (\lambda_0 - X)^{d_0} P_B(X) \Rightarrow (\lambda_0 - X)^{d_0}$ divise $P_f(X) \Rightarrow d_0 \leqslant \omega_0$

Corollaire :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   Pour toute valeur propre simple λ_0 de f, la dimension du sous espace vectoriel E_{λ_0} associée à λ_0 vaut 1

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Pour toute valeur propre simple λ_0 de A, on a $\dim E_{\lambda_0} = 1$.

III. Diagonalisation

Def :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   On dit que f est diagonalisable ssi il existe une base B de E telle que $\mathcal{M}_B(f)$ soit diagonale.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   A est diagonalisable ssi $\exists\, P$ inversible $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exists\, D$ diagonale $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $A = P\,D\,P^{-1}$.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; f est diagonalisable ssi il existe une base de E formée des vecteurs propres de f.

Démo :

Supposons f diagonalisable, alors il existe une base $B=(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\mathcal{M}_B(f)$ soit diagonale.

Il existe donc $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ telles que $\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \ f(e_i) = \lambda_i\, e_i \Rightarrow B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f.

Réciproquement :

S'il existe une base de E formée des vecteurs propres de f alors il suffit d'écrire la matrice de f dans cette base pour obtenir une matrice diagonale.

Def : Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n.

P est dit scindé ssi P a exactement n racines distinctes ou confondues dans $\mathbb{K}$. Ou encore ssi la somme des ordres de multiplicité des racines de P est égale au degré de P.

Théorème : CNS de diagonalisation

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi : $\begin{cases} P_f \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \text{Pour chaque valeur propre } \lambda \text{ de } f\text{, la } \dim(\operatorname{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_E)) \\ \text{est égale à l'ordre de multiplicité de } \lambda. \end{cases}$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est diagonalisable ssi : $\begin{cases} P_A \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \text{Pour chaque valeur propre } \lambda \text{ de } A\text{, la } \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda\, \mathrm{I}_n)) \\ \text{est égale à l'ordre de multiplicité de } \lambda. \end{cases}$

Démo : Supposons que f est diagonalisable.

Soit $B=(v_1, \ldots, v_n)$ base de E formée par des vecteurs propres de f et donc $\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$P_f(X) = \det(\mathcal{M}_B(f) - X\, \mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - X \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X) \Rightarrow P_f$ a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ donc il est scindé.

Étude de la dimension des sous espaces propres

Supposons que les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont rangés de telle sorte que : $\big(\ (v_1, v_2, \ldots, v_k), (v_{k+1}, \ldots, v_l), \ldots, (\ldots, v_n) \ \big)$
λ_1 d'ordre k_1 ; λ_2 d'ordre k_2 ; ... ; λ_p d'ordre k_p. `(simple groupement par valeur propre)`

C'est à dire $P_f(X) = (-1)^n\, (X - \lambda_1)^{k_1}\, (X - \lambda_2)^{k_2} \cdots (X - \lambda_p)^{k_p}$; $\lambda_i \neq \lambda_j$; $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$

$\Rightarrow \begin{cases} f(v_1) = \lambda_1\, v_1 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ f(v_k) = \lambda_1\, v_k \end{cases}$ et $\begin{cases} f(v_{k+1}) = \lambda_2\, v_{k+1} \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \end{cases}$ et ... et $\begin{cases} \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ f(v_n) = \lambda_1\, v_n \end{cases}$

On sait que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.

$\dim(E_{\lambda_1}) \geqslant k_1$ mais $\dim(E_{\lambda_1}) \leqslant k_1 \Rightarrow \dim(E_{\lambda_1}) = k_1$. De même pour les autres E_{λ_i}.
$\Rightarrow$ la dimension de chaque E_{λ_i} = l'ordre de multiplicité de λ_i.

Remarque :

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet n valeurs propres deux à deux distinctes alors f (resp. A) est diagonalisable.

Exemple : La matrice A est-elle diagonalisable ? avec $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

`Rq :` $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = \det(A - X\, \mathrm{I}_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} -2X & 1 & 1 \\ 1 & -2X & 1 \\ 1 & 1 & -2X \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} -2X+2 & 1 & 1 \\ -2X+2 & -2X & 1 \\ -2X+2 & 1 & -2X \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 (-2X+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2X & 1 \\ 1 & 1 & -2X \end{vmatrix}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 (-2X+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2X-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2X-1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 (-2X+2)\, (2X+1)^2$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ simple ; $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ double donc P_A est scindé.

$\boldsymbol{E_{\lambda_1}}$ **:** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ ssi $(A - \mathrm{I})\, X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 & (1) \\ x - 2y + z = 0 & (2) \\ x + y - 2z = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) : -3x + 3y = 0 \\ (3) : 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ ssi $X = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{E_{\lambda_2}}$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}$ ssi $(A + \frac{1}{2}\mathrm{I})\, X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=0$ equation d'un plan vectoriel $\Rightarrow x = -y-z$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}$ ssi $X = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-\frac{1}{2}}$ est le plan vectoriel de base (V_2, V_3) avec $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A est diagonalisable.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ de base $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $A = \mathcal{M}_B(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$

Soit $V = (V_1, V_2, V_3)$ une nouvelle base de E, faisons un changement de base de B à V.

Soit P la matrice de passage de B à V. $P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$

Soit D la matrice de f par rapport à V.

On sait que $A = P D P^{-1}$ or $P = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(V_1) & f(V_2) & f(V_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$ or $\begin{matrix} f(V_1) = \lambda_1 V_1 = 1 \cdot V_1 \\ f(V_2) = -\frac{1}{2} \cdot V_2 \\ f(V_3) = -\frac{1}{2} \cdot V_3 \end{matrix}$

`Ça n'a pas l'air complet...`

III.1. Application de la diagonalisation

III.1.1. Calcul des puissances d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Supposons que A soit diagonalisable, alors il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (inversible), D diagonale tq $A = P D P^{-1}$.
Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = P D^k P^{-1}$.

Démo :

Si $k = 1$ la propriété est vraie

Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang k, c'est à dire : $A^k = P D^k P^{-1}$
$A^{k+1} = A^k A = P D^k (P^{-1} P) D P^{-1} = P (D^k D) P^{-1} = P D^{k+1} P^{-1}$.
Donc $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = P D^k P^{-1}$

Remarque : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$ Montrer que A est inversible pour tout $k \in \mathbb{Z} \quad A^k$.

$P_A(X) = \det(A - X\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -X & -9 & 6 \\ -1 & -8-X & 7 \\ 1 & -14 & 11-X \end{vmatrix} = -(X-2)(X+2)(X-3)$.

A admet 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow A$ est diagonalisable ; A est inversible car $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

$\boldsymbol{E_{-2}}$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 6y + 7z = 0 \\ x - 14y + 13z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases} \Rightarrow E_{-2} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\, V_1$

$\boldsymbol{E_2}$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 10y + 7z = 0 \\ x - 14y + 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} \\ z = \frac{3}{2} y \end{cases} \Rightarrow E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\, V_2$

$\boldsymbol{E_3}$: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 11y + 7z = 0 \\ x - 14y + 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y = 3z \\ 3x = 2y \end{cases} \Rightarrow E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\, V_3$

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A = P D P^{-1}$

On sait $\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = P \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}$ c'est à dire $A^k = P D^k P^{-1}$.

Puisque A est inversible $\Rightarrow A^{-1}$ existe et A^k pour $k \in \mathbb{Z}^*$ existe aussi.

Soit $k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow -k \in \mathbb{N}$ `Rem :` $(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$A^k = (A^{-1})^k = \left[\left(P D P^{-1} \right)^{-1} \right]^{-k} = \left[\left(P^{-1} \right)^{-1} D^{-1} P^{-1} \right]^{-k} = \left[P D^{-1} P^{-1} \right]^{-k} = P \left(D^{-1} \right)^{-k} P^{-1} = P D^{-k} P^{-1}$

donc $\forall k \in \mathbb{Z} \quad A^k = P D^k P^{-1}$

III.1.2. Suites récurrentes linéaires du premier ordre

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 22$; $w_0 = 22$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: (S): $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2 u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2 w_n) \end{cases}$.

Calculer u_n, v_n, w_n et étudier la convergence de ces trois suites.

Soit $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$; $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$; $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$; $(S) \Rightarrow X_{n+1} = A X_n$ où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A X_{n-1} = A A X_{n-2} = A^2 X_{n-2} = \cdots = A^n X_0$

On diagonalise A.

$P_A(X) = \det(A - X\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - X & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - X & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - X \end{vmatrix} = (1 - X)\left(\frac{1}{12} - X\right)\left(\frac{1}{4} - X\right) \Rightarrow$ les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{12}$.

On calcule les sous espaces propres et on obtient $\left(V_1 \;\; V_2 \;\; V_3 \right)$ base des vecteurs propres avec les V_i sont associés respectivement à 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$. En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; on sait que $A^n = P\, D^n\, P^{-1}$. Or $X_n = A^n\, X_0 = P\, D^n\, P^{-1}\, X_0 \Rightarrow$ $\begin{cases} u_n = 14 - 11 \cdot 4^{-n} - 3 \cdot 12^{-n} \\ v_n = 14 + 8 \cdot 12^{-n} \\ w_n = 14 + 11 \cdot 4^{-n} - 3 \cdot 12^{-n} \end{cases}$ $\Rightarrow$ les trois suites sont convergentes vers la même limite qui est 14.

IV. Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice

Def : $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_N X^N \in \mathbb{K}[X]$

1. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on note $P(f) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_N f^N$ est appelé un polynôme d'endomorphisme
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note $P(A) = a_0 \mathrm{I}_n + a_1 A + \ldots + a_N A^N$ est appelé un polynôme de matrice.

Exemple : $(2 + 3X)(f) = 2\,\mathrm{Id}_E + 3f$; $(2 + 3X)(A) = 2\,\mathrm{I}_n + 3A$

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie ; B une base de E ; $f \in \mathcal{L}(E)$; $A = \mathcal{M}_B(f)$

alors $\mathcal{M}_B(P(f)) = P(A)$.

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; $P \in \mathbb{K}[X]$

On dit que P est *un* polynôme annulateur de f (respectivement de A) ssi $P(f) = 0$ (respectivement $P(A) = 0$) et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. `Ce polynome n'est pas unique :` $X \cdot P$ `en est aussi un !`

Propriétés :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$; Soit x vecteur propre associé à la valeur propre λ de f on alors $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad (P(f))\,(x) = P(\lambda)\,x$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ valeur propre de A associée à la vecteur propre X on a alors $\forall P \in \mathbb{K}[X] = P(\lambda)\,X$.

Démo :

Montrons par récurrence : $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad f^k(x) = \lambda^k\, x$ (avec x est le vecteur propre associé à la valeur propre λ).

- On a $f(x) = \lambda\, x$
- On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang k c'est à dire $f^k(x) = \lambda^k\, x$
- $f^{k+1}(x) = f\big(f^k(x)\big) = f\big(\lambda^k x\big) = \lambda^k f(x) = \lambda^k\, \lambda\, x = \lambda^{k+1}\, x$

On a alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X] \quad P = \sum_{k=0}^{N} a_k\, x^k$.

$P(f)\,(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} a_k\, f^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, f^k(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, \lambda^k\, x = P(\lambda)\, x$

Et même démo pour le 2°.

Théorème de Cayley-Hamilton

1. $\forall\, f \in \mathcal{L}(E)$; $P_f(f) = 0$; P_f étant le polynôme caractéristique de f.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $P_A(A) = 0$; P_A étant le polynôme caractéristique de A.

V. Trigonalisation

Def :

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable ssi il existe une base B de E tq $\mathcal{M}_B(f)$ soit triangulaire.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable ssi il existe une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A.

Théorème :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   a. A est trigonalisable
   b. P_A est scindé
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   a. f trigonalisable
   b. P_f est scindé

Démo par récurrence :

- *b.* $\Rightarrow$ *a.* :

  $n = 1$: on choisit une base $\{e_1\}$ de E et $\mathcal{M}_{\{e_1\}}(f) = cste$ qu'on considère comme matrice triangulaire.

  Hypothèse de récurrence : H_{n-1} si $\dim F = n - 1$ (F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel) ; $g \in \mathcal{L}(E)$.
  Si P_g a $(n-1)$ racines dans $\mathbb{K}$ alors $\exists$ une base B de F tq $\mathcal{M}_B(g)$ soit triangulaire supérieure.

  Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$; P_f a n racines dans $\mathbb{K}$.
  Montrons alors que f est trigonalisable :

  f admet au moins un vecteur propre b_1 associé à la valeur propre λ_1, donc $f(b_1) = \lambda_1\, b_1$.
  On complète b_1 en une base de E c'est à dire $E = \text{Vect}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
  $\forall\, V \in E \quad V = V_1 + V_2$ $\big($avec $V_1 \in \text{Vect}(b_1)$ et $V_2 \in \text{Vect}(b_2, \ldots, b_n)\big)$ cette décomposition est unique.

  $$\mathcal{M}_{(b_1, \ldots, b_n)}(f) = \begin{array}{cc} f(b_1)\,f(b_2)\ldots f(b_n) & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \end{array}$$

  Soit $F = \text{Vect}\,(b_2, \ldots, b_n)$
  $\exists ?\, g \in \mathcal{L}(E)$ tq g aura pour matrice C ?

  La réponse est *oui* !

$F \subset E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{q} F$ où q est le **projecteur** sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(b_1)$ alors $\mathcal{M}_{(b_2,\ldots,b_n)}(g) = C$, avec $\underbrace{q \circ f}_{g = q\circ f}$

D'après H_{n-1} comme $\dim F = n-1$ et $g \in \mathcal{L}(F)$; il existe une base $(b_2', \ldots, b_n')$ de F tq $\mathcal{M}_{(b_2',\ldots,b_n')}(g)$ soit triangulaire supérieure ainsi

$$\mathcal{M}_{(b_1,b_2',\ldots,b_n')}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(b_1) & f(b_2') & \ldots & f(b_n') \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & (0) & & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{array} \end{array} \Rightarrow f \text{ est trigonalisable.}$$

- $a. \Rightarrow b.$: Supposons que $\exists\, B = (b_1, \ldots, b_n)$ tq $\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & (a_{ij}) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

  $P_f(X) = \det(\mathcal{M}_B(f) - X\,\mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - X & & (\alpha_{ij}) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn} - X \end{vmatrix} = (\alpha_{11} - X) \cdots (\alpha_{nn} - X) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_{ii} - X) \Rightarrow P_f$ a n racines dans $\mathbb{K}$.

Exemple d'application : Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$P_A(X) = \det(A - X\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -2-X & 2 & -1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ -1 & 2 & -2-X \end{vmatrix} = -(X+1)^3 \Rightarrow \lambda = -1$ est une valeur propre triple pour A.

P_A est scindé donc A est trigonalisable.

$\boldsymbol{E_{-1}}$**:** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow -x + 2y - z = 0$ équation d'un plan

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}$ ssi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x\,V_1 + y\,V_2 \Rightarrow E_{-1} = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\mathcal{M}_B(f) = A$ $\quad B$ base canonique de E.

$$\mathcal{M}_{B=(V_1,V_2,V_3)}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(V_1) & f(V_2) & f(V_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array} = T.$$ Cherchons V_3 tq (V_1, V_2, V_3) soit une base de E.

Notons $V_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Il suffit d'avoir (V_1, V_2, V_3) libre.

On aura $A = PTP^{-1}$.

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ -1 & 2 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow v_1 + v_3 - 3\,v_3 \neq 0$

Choisissons $v_1 = 1$ et $v_2 = v_3 = 0 \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(V_3) = \alpha\,V_1 + \beta\,V_2 - V_3 \Leftrightarrow A\,V_3 = \alpha\,V_1 + \beta\,V_2 - V_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ après calcul on trouve $\alpha = \beta = -1$.