Semestre 4 : 2/3 d'algèbre (plus facile, moins d'astuce, plus de cours) et 1/3 d'analyse

Épreuves au mois de mai (Intégration, Algèbre linéaire et bilinéaire)

Algèbre révision

I. Applications linéaires

Def : E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Une application $f\colon E \to F$ est bilinéaire ssi $\begin{cases} \forall x, y \in E \;\; f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E \;\; f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$ que l'on peut regrouper dans : $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\;f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est note $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarques :

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f(0_E) = 0_F$
- Si E_1 est un sous espace de E alors $f(E_1)$ est un sous espace de F.
- $f(E) \equiv \operatorname{Im} f$ est un sous espace de F.

Def : Une application linéaire $f\colon E \to F$ est appelée :

Endomorphisme si $E = F$

Isomorphisme si f est bijective

Automorphisme si f est bijective et $E = F$.

Def : On appelle forme linéaire sur E une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple : $f\colon \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) = a x + b y \end{array}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Def : Soit $f\colon E \to F$. On appelle :

- Noyau de f le sous-espace vectoriel de E défini par : $\operatorname{Ker} f = \vec{f}\,\{0_F\} = \{x \in E \;\text{ tq }\; f(x) = 0_F\}$
- Image de f le sous espace vectoriel de F défini par $\operatorname{Im} f = f(E)$.

Def : f est injective ssi $\forall x \in E$ $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\forall x, y \in E$ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Théorème : f injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Démo :

- Supposons que f est injective, alors soit $x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
- Supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, alors $\forall x, y \in E$ $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ d'où f est injective.

Def : Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f et on note $\operatorname{rg}(f)$ la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Remarque : le seul espace de dimension 0 est le singleton {0}.
Le noyau et l'image sont deux entités différentes l'un il habite ici, l'autre il habite à Paris.
Le Ker f est dans E alors que Im f est dans F.

Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a :

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f).$$

Soit $f\colon E \to F$ avec $\dim E = p$, et $B_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Une application linéaire est entièrement définie par la donnée des vecteurs $f(e_i)$ pour $i \in [\![1, p]\!]$. Ces vecteurs sont déterminés par leurs composantes dans lavase B_2 de F, $B_2 = (e'_1, \ldots e'_n)$.

On appelle matrice de f par rapport aux bases de E et F et on note $\mathcal{M}_{B_1,B_2}(f)$ la matrive dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est formée par les composantes de $f(e_j)$ dans la base B_2 c'est la matrice à n lignes et p colonnes :

$$\mathcal{M}_{B_1,B_2}(f) = \begin{array}{c} f(e_1)\ \dots\ f(e_p) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \qquad f(e_1) = a_{11}\, e'_1 + a_{21}\, e'_2 + \dots + a_{n1}\, e'_n.$$

Produit de 2 matrices

Étant donné 2 matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors la matrice pruduit $A \times B$ est notée $C \in \mathcal{M}_{p,p'}$ et $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$.

`Une matrice 1x1 est un scalaire.`

Inversion de matrices

Une matrice A est dite inversible s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I$ (identité).

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver son inverse (méthode du pivot de Gauss ou des valeurs et vecteurs propres)

Changement de base dans E sans changement de base dans F

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E; $B'_1 = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de E, F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension p, $B_2 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F.

On sait qu'il qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ telle que $A = \mathcal{M}_{B_1,B_2}(f)$.

$\forall X \in E \quad X = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \quad$ et $\quad X' = \sum_{i=1}^{n} x'_i\, e'_i$. Mais $e'_i = \alpha_{1i}\, e_1 + \dots + \alpha_{ni}\, e_n$.

On introduit la matrice de passage $\mathcal{P}$ de B_1 à B'_1 par $\mathcal{P} = \begin{array}{c} e'_1\ \dots\ e'_n \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$

On a la relation $\boxed{X = PX'}$ et $\mathcal{M}_{B'_1,B_2}(f) = \mathcal{M}_{B_1,B_2}(f) \times P$ (A'=A*P)
où X est la matrice colonne des anciennes composantes et X' est la matrice colonne des nouvelles composantes.

Exemple : Soient E dont une base $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ et F dont une base $B_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ dont $\mathcal{M}_{B_1,B_2}(f) = \begin{array}{c} f(e_1)\ \ f(e_2)\ \ f(e_3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{array}$.

On fait le changement de base suivant dans E : $\begin{cases} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases}$.

1. Déterminer la matrice de passage de B_1 à $B'_1 = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et la matrice $\mathcal{M}_{B'_1,B_2}(f)$

$$P = \begin{array}{c} e'_1\ \ e'_2\ \ e'_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} ; \mathcal{M}_{B'_1,B_2}(f) = \mathcal{M}_{B_1,B_2}(f) \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} f(e'_1)\ \ f(e'_2)\ \ f(e'_3) \\ \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ -3 & -6 & -1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{array}$$

Changement de base dans E avec changement de base dans F

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n dont une base $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ et une autre base $B'_1 = (e'_1, \dots e'_n)$.
Soit F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension p dont une base $B_2 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et une autre base $B'_2 = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $\exists!\ A \in \mathcal{M}_{p,n}$ tq $A = \mathcal{M}_{B_1,B_2}(f)$.
Soit P la matrice de passage de B_1 à B'_1.
Soit G la matrice de passage de B_2 à B'_2.

On a la relation : $\boxed{\mathcal{M}_{B'_1,B'_2}(f) \equiv A' = Q^{-1}\, A\, P}$

Remarque : $f\in\mathcal{L}(E)\Leftrightarrow f: E\rightarrow E$.

Soit $A=\mathcal{M}_{B_1}(f)$, $A=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$.
On prend une nouvelle base $B_1'=(e_1',\ldots,e_n')$.
Soit P la matrice de passage de B_1 à B_1'.
Soit $A'=\mathcal{M}_{B_1'}(f)$, $A'=P^{-1}\,A\,P$.

Cas des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n dont une base $B_1=(e_1,\ldots,e_n)$ et soit $B_1'=(e_1',\ldots,e_n')$ une autre base de E. Soit P la matrice de passage de B_1 à B_1', alors on a la relation : $\boxed{\mathcal{M}_{B_1'}(f)=P^{-1}\mathcal{M}_{B_1}(f)\,P}$.

`Si vous n'avez pas envie d'assister au cour, vous pouvez aller à la cafet', c'est ouvert à cette heure-là ! (5 minutes après Alexis part) Y en a qui prennent les choses à la lettre, hein...`

Opération élémentaires sur les rangées d'une matrice

On appelle opération élémentaire sur les lignes (respecivement colonnes) d'une matrice l'une des 3 opérations suivantes :

1. addition d'un multiple d'une ligne (resp. colonne) à une autre ligne (resp. colonne)
2. multiplication d'une ligne (resp. colonne) par un scalaire non nul.
3. échange de 2 lignes (resp. colonnes)

Soit $i,j\in[\![1,n]\!]$; $\lambda\in\mathbb{K}$, on convient des codages suivants :

1. $L_i\leftarrow L_i+\lambda\,L_j$: addition de $\lambda\,L_j$ à la ligne L_i **i != j**
2. $L_i\leftarrow\lambda\,L_i$ $(\lambda\neq 0)$: multiplication de la ligne L_i par $\lambda\neq 0$
3. $L_i\leftrightarrow L_j$: échange des lignes L_i et L_j.

On utilise un codage analogue pour les colonnes en remplaçant L par C.

Proposition : 2 matrices déduites l'une de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires ont le même rang.

Si α est un scalaire non nul, on a : $A=\begin{pmatrix} \alpha & \text{qch} & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & A' \end{pmatrix}$ le $\mathrm{rg}(A)=1+\mathrm{rg}(A')$

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ Déterminer le $\mathrm{rg}(A)$.

On effectue : $L_1'\leftarrow L_1$, $L_2'\leftarrow -2\,L_1+L_2$, $L_3'\leftarrow -3\,L_1+L_3$, ${L'}_4\leftarrow -a\,L_1+L_4$ et on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & b-2\,a & c-3\,a & d-4\,a \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(A)=1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ b-2\,a & c-3\,a & d-4\,a \end{pmatrix}$
Soit $A'=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ b-2\,a & c-3\,a & d-4\,a \end{pmatrix}\begin{array}{l} L_1'\leftarrow L_1 \\ L_2'\leftarrow -2\,L_1+L_2 \\ L_3'\leftarrow -(b-2\,a)\,L_1+L_3 \end{array}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+c-2\,b & 2\,a+d-3\,b \end{pmatrix}$
$\Rightarrow\mathrm{rg}(A')=1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+c-2\,b & 2\,a+d-3\,d \end{pmatrix}$.
Si $a+c-2\,b=0$ et $2\,a-d-3\,b=0$, c'est à dire $a+c=2\,b$ et donc $\mathrm{rg}(A)=2$.
Sinon $\mathrm{rg}(A')=2$ et $\mathrm{rg}(A)=3$.

Rappel :

1. On appelle rang d'une famille de vecteurs le nombre maximal de vecteurs d'une partie libre extraite de cette famille.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$, on appelle rang de A det on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang des vecteurs colonnes de A.

Déterminants

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\,d-b\,c$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'un déterminant :

- Un déterminant qui a 2 colonnes (resp. 2 lignes) identiques est nul.
- L'échange de 2 colonnes d'un déterminant (resp. 2 lignes), multiplie la valeur du déterminant par -1
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres colonnes) est nul.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) formée de 0 est nul.
- La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes).
- Si on multiplie une colonne (resp. une ligne) d'un déterminant par un scalaire λ, sa valeur est multipliée par λ.

Exemple : Calculer les déterminants $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

- $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$
- $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ on remarque que $L_2 = \frac{L_1 + L_3}{2} \Rightarrow D_2 = 0$
- $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1' \leftarrow L_1 \\ L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a)\,(c-b)$