Complément de cours

Def 1 : Soit $f: E \to F$ (E, F e.v.n)

f est dite homéomorphisme ssi f est bijective, continue et f^{-1} est continue.

Def 2 : Étant donnés 2 ouverts $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme,

toute application f bijective de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'$; f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et f^{-1} de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}'$.

Conséquence de la def : Soit f un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'$ ouverts de $\mathbb{R}^n$;

$$\text{On a } \begin{array}{lll} f & \text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{O} \Rightarrow \forall\ a \in \mathcal{O} & df_a \text{ existe} \\ f^{-1} & \text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{O}' \Rightarrow \forall f(a) \in \mathcal{O}' & df^{-1}_{f(a)} \text{ existe} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Or} & f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \forall a \in \mathcal{O}\ \ d(f \circ f^{-1})_{f(a)} = df_{f^{-1}(f(a))} \circ df^{-1}_{f(a)} = df_a \circ df^{-1}_{f(a)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \\ \text{De même} & f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \forall a \in \mathcal{O}\ \ d(f^{-1} \circ f)_a = df^{-1}_{f(a)} \circ df_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \end{array}$$

Donc df_a est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ et admet pour réciproque $df^{-1}_{f(a)}$ ainsi on a : $\boxed{(df_a)^{-1} = df^{-1}_{f(a)}}$

La matrice Jacobienne de df_a par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qu'on note $\mathcal{M}_a(f)$ est inversible et on a $\mathcal{M}_a(f) \times \mathcal{M}_{f(a)}(f^{-1}) = I_n \Rightarrow \mathcal{M}_a(f)$ est inversible $\Rightarrow \det(\mathcal{M}_a(f)) \neq 0$.

Théorème : Soit $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}'$) un ouvert de E (respectivement un ouvert de F) et $f: \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ une appli.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{O} \\ f \text{ bijective} \\ \text{Pour tout } a \in \mathcal{O},\ df_a \text{ est un bijection de } E \text{ dans } F \end{array} \right. \quad \text{alors } \left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = \dim(F) \\ f \text{ est un } \mathcal{C}^1 \text{ difféomorphisme de } \mathcal{O} \text{ sur } \mathcal{O}' \end{array} \right.$$

Remarque : Ce théorème est surtout utile dans le cas où f^{-1} est difficile à exprimer.

Exemples :

1. Montrer que l'application $f: \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (\ x^2 + 3\,x\,e^y,\ \ y - x^2\ ) \end{array}$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

   - f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, car ses composantes f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

   - Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
     $$f(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^3 + 3\,x\,e^y \\ Y = y - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x\,e^{y+x^2} = X\ \texttt{(1)} \\ y = Y + x^2 \end{cases} \qquad \texttt{(1)} \Leftrightarrow 3\,x\,e^{x^2}\,e^Y + x^3 - X = 0$$

     Soit l'application $\varphi: x \mapsto 3\,x\,e^{x^2}\,e^Y + x^3 - X$; φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
     $\varphi'(x) = 3\,e^{x^2}\,e^Y(1 + 2\,x^2) + 3\,x^2 > 0$ donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ par conséquent φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
     $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ tq $\varphi(x) = 0$ ceci montre que le système d'équation précédent d'inconnues x et y admet une solution unique et donc f est bijective.

   - Pour montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ on va utiliser les théorème précédent car l'expression de f^{-1} est difficile à obtenir : $\mathcal{M}_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x^2 + 3\,e^y & 3\,e^y \\ -2\,x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{M}_{(x,y)}(f)) = \begin{vmatrix} 3\,x^2 + 3\,e^y & 3\,e^y \\ -2\,x & 1 \end{vmatrix}$
     $= 3\,e^y(1 + 2\,x^2) + 3\,x^2 > 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{(x,y)}(f)$ est inversible $\Rightarrow df_{(x,y)}$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

   Conclusion : f est de $\mathcal{C}^1$ et est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien rapporté à un repère orthonormal ; définissons les coordonnées polaires.

   Soit $\hat{\varphi}: \begin{array}{c} (r,\theta) \\ \mathbb{R} \times]-\pi,\pi] \end{array} \mapsto (\ x = r\cos\theta\ \ y = r\sin\theta\ ) \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. On a $\hat{\varphi}$ de classe $\mathcal{C}^1$

   On voudrait que $\hat{\varphi}$ soit bijective $\Rightarrow r \in \mathbb{R}^+$ mais le point $(0,0)$ devient $(0,\theta)$ avec θ arbitraire $\Rightarrow r \in \mathbb{R}^*_+$.

   $$\text{Regardons } \overline{\varphi}: \begin{array}{c} (r,\theta) \mapsto (\ x = r\cos\theta\ \ y = r\sin\theta\ ) \\ \mathbb{R}^*_+ \times]-\pi,\pi] \longrightarrow (\mathbb{R}^*)^2 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta \text{ défini par } \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

   On a $\overline{\varphi}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*_+ \times]-\pi,\pi]$; $\overline{\varphi}$ bijectif.

$(\overline{\varphi})^{-1}$ est-il continu ?

θ est discontinue au point $(-1,0)$ car sur la droite $x=-1$ on a : $\begin{array}{l}(-1, y>0) \rightsquigarrow r=1 \text{ et } \theta=\pi \\ (-1, y<0) \rightsquigarrow r=1 \text{ et } \theta=-\pi\end{array}$.

Soit $\varphi \colon \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \backslash \Delta_\pi^+ \\ (r,\theta) \mapsto \left(x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \right)\end{array}$ où $\Delta_\pi^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leqslant 0 \text{ et } y=0\right\}$

On a alors φ qui vérifie φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\underbrace{\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[}_{\mathcal{O}}$; φ bijectif sur $\underbrace{\mathbb{R}^2 \backslash \Delta_\pi^+}_{\mathcal{O}'}$.

De plus $\varphi^{-1} \colon (x,y) \mapsto \left(r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = ? \right)$.

On a $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r+r\cos\theta} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \operatorname{Arctan}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \Rightarrow \theta = 2\operatorname{Arctan}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

$\Rightarrow$ les composantes de φ^{-1} sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta_\pi^+$.

Or $\mathcal{M}_{(x,y)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r > 0 \neq 0$ donc φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'$.

Théorème de l'inverse local : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E ; $f \colon \mathcal{O} \to F$, de classe $\mathcal{C}^1$; $a \in \mathcal{O}$

Si df_a est bijective alors :

- $\dim(E) = \dim(F)$
- il existe un voisinage ouvert V de a dans E tel que f soit un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.