Différentiabilité

C'est la notion équivalent de la dérivabilité, mais sur $\mathbb{R}^n$.

Rappel : Une fonction vectorielle de plusieurs variables réelles est une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont des e.v.n. de dimension respective n et p.

I. Applications partielles associées à f

Def : Soit $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

On appelle $j^{\text{ième}}$ application partielle associée à f en $a = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$
On note $\varphi_{j,a}$, $j \in [\![1,n]\!]$ l'application $\varphi_{j,a} = f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n)$
C'est à dire $\varphi_{j,a}: x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots a_n) \Rightarrow \varphi_{j,a}$ est une fonction vectorielle d'une seule variable.

Exemple : $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \end{pmatrix} \end{array}$ avec $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$; $f_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$; $f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;

Soit $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

d'où $\varphi_{1,a}: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x_1 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2 + 3 & x_1^2 + 2^2 + 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5 & x_1^2 + 13 \end{pmatrix} \end{array}$

$\varphi_{2,a}: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 + x_2 + 3 & 1^2 + x_2^2 + 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 4 & x_2^2 + 10 \end{pmatrix} \end{array}$

$\varphi_{3,a}: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 2 + x_3 & 1^2 + 2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + 3 & x_3^2 + 5 \end{pmatrix} \end{array}$

Théorème : Si f est continue en $a \in \mathbb{R}^n$ alors les n applications partielles $\varphi_{j,a}$ sont continues.

La réciproque est *fausse*.

Démo : f continue en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^n \underset{(\text{norme})}{N}(x - a) < \eta \Rightarrow \underset{(\text{norme équivalente})}{N'}(f(x) - f(a)) < \varepsilon$

avec $N(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Sup}} |x_i|$; N' est une norme de $\mathbb{R}^p$
d'où f continue en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Sup}} |x_i - a_i| < \eta \Rightarrow N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x_j \in \mathbb{R} \quad |x_j - a_j| < \eta \Rightarrow N'(f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)) < \varepsilon$

`Remarque` : $x - a = (0, 0, \dots, 0, x_j - a_j, 0, 0, \dots, 0) = x_j - a_j$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x_j \in \mathbb{R} \quad |x_j - a_j| < \eta \Rightarrow N'(\varphi_{j,a}(x_j) - \varphi_{j,a}(a_j)) < \varepsilon$
$\Rightarrow \varphi_{j,a}$ est continue en a_j.

La réciproque est fausse, en effet :

Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_1^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

f n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x_1, x_1) = \frac{x_1 x_1}{x_1^2 + x_1^2} = \frac{x_1^2}{2 x_1^2} = \frac{1}{2} \underset{x_1 \to 0}{\not\longrightarrow} 0 = f(0,0)$

mais $\left.\begin{array}{l} \varphi_{1,(0,0)}: x_1 \mapsto f(x_1, 0) = \frac{x_1 \times 0}{x_1^2 + 0} = 0 \longrightarrow f(0,0) \\ \varphi_{2,(0,0)}: x_1 \mapsto f(0, x_2) = \frac{0 \times x_2}{0 + x_2^2} = 0 \longrightarrow f(0,0) \end{array}\right\}$ les applications partielles associées à f en $(0,0)$ sont continues en 0.

II. Différentiabilité

Def : Soient E, F deux e.v.n. sur $\mathbb{R}$; r un ouvert de E ; $f: \Omega \to F$.

f est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ ssi il existe :

- L_a une application linéaire de $E \to F$
- $\varepsilon_a: \Omega \backslash a \to F$ vérifiant $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_a(h) = 0$

telles que $\forall h\in\Omega\backslash a \quad f(a+h)=f(a)+L_a\cdot h+\|h\|\,\varepsilon_a(h)$ Remarque : $L_a\cdot h\Leftrightarrow L_a(h)$

Autre définition : f différentiable en $a\in\Omega$ ssi $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(a+h)-f(a)-L_a(h)}{\|h\|}=0$

Conséquences :

1. Si f est différentiable en $a\in r$ alors f est continue en a ; En effet :

$\forall h\in\Omega\backslash a\;\; f(a+h)=f(a)+L_a(h)+\|h\|_E\,\varepsilon_a(h)$
$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=\lim\limits_{h\to 0}(f(a)+L_a(h)+\|h\|_E\,\varepsilon_a(h))=f(a)+\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}L_a(h)}_{0}+\underbrace{\lim\limits_{h\to 0}\|h\|_E\,\varepsilon_a(h)}_{0}$

$\Rightarrow f$ est continue en a.

2. Il existe au plus une application L_a satisfaisant la condition de la différentiabilité.

Supposons qu'il existe deux applications L_a et L'_a vérifiant les conditions de différentiabilité, alors :
$\forall h\in\Omega\backslash a\; f(a+h)=f(a)+L_a(h)+\|h\|_E\,\varepsilon_a(h)$ Remarque : $\varepsilon''_a=\varepsilon_a-\varepsilon'_a$
$f(a+h)=f(a)+L'_a(h)+\|h\|_E\,\varepsilon'_a(h)$
$\Rightarrow (L_a-L'_a)(h)=\|h\|_E\,\varepsilon''_a(h) \;\Rightarrow\; \|(L_a L'_a)(h)\|_F=\|h\|_E\,\|\varepsilon''_a(h)\|_F$ (*)
or $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon''_a(h)=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0$ tq $\|h\|_E\leqslant\alpha\Rightarrow\|\varepsilon''_a(h)\|_F<\varepsilon$
Soit $h\in\Omega\backslash a$ tq $\|h\|_E=1\Rightarrow\|\alpha h\|_E=\alpha\|h\|_E=\alpha\Rightarrow\|\varepsilon''_a(\alpha h)\|_F<\varepsilon$
or d'après (*) on a $\|L_a-L'_a)(\alpha h)\|=\|\alpha h\|_E\,\|\varepsilon''_a(\alpha h)\|_F$
$\Rightarrow\cancel{\alpha}\|(L_a-L'_a)(h)\|=\cancel{\alpha}\underbrace{\|h\|_E}_{(=1)}\|\varepsilon''_a(\alpha h)\|_F$
$\Rightarrow\forall h$ tq $\|h\|_E=1$, $\|(L_a-L'_a)(h)\|<\varepsilon$ ceci n'est réalisable que si $L_a-L'_a=0\Leftrightarrow L_a=L'_a$.
L_a s'appelle la différentielle de f en a ou application linéaire tangente à f en a et on la note $d\,f_a$.

Exemples :

1. Soit f une application linéaire de E dans F alors $\forall a\in E,\ d\,f_a=f$
En effet $\forall h\in\Omega\backslash a\quad f(a+h)=f(a)+\underbrace{f(h)}_{d\,f_a(h)}+\|h\|_E\times\underbrace{0}_{\varepsilon_a(h)}\;\Rightarrow d\,f_a=f$

2. $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto\begin{cases} f(x,y)=\frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ f(0,0)=0\end{cases}\end{array}$

Montrons que f est différentiable en $(0,0)$ et sa différentielle est l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $d\,f_{(0,0)}=(\ (0,0)\ )$.

Cas général : f différentiable en a ssi $\forall h\in\Omega\backslash a\; f(a+h)=f(a)+d\,f_a(h)+\|h\|\,\varepsilon_a(h)$
dans notre cas $a=(0,0)$ et $d\,f_{(0,0)}=(\ (0,0)\ )$.

On doit prouver que $\forall h\in\Omega\backslash a\quad f((0,0)+h)=f(0,0)+d\,f_{(0,0)}(h)+\|h\|\,\varepsilon_a(h)$
c'est à dire $f(h)=0+0+\|h\|\,\varepsilon_a(h)$; on choisit $\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$; $h=(h_1,h_2)$
c'est à dire $f(h)=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\varepsilon_{(0,0)}(h)$, c'est à dire $\frac{f(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\varepsilon_{(0,0)}(h)$
c'est à dire qu'il faut montrer que $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon_{(0,0)}(h)=0.$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1}{\ln(\sqrt{h_1^2+h_2^2})\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{1}{\ln(\sqrt{h_1^2+h_2^2})}$$

$0\leqslant|\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{1}{\ln(\sqrt{h_1^2+h_2^2})}|\leqslant 1\cdot|\underbrace{\frac{1}{\ln(\sqrt{h_1^2+h_2^2})}}_{\underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\hookrightarrow 0}}|$ donc $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$

3. Soit f une application bilinéaire de $E_1\times E_2\to F$ bilinéaire = linéaire pour chacune des deux variables
f est continue sur $E_1\times E_2$ si $\forall(h_1,h_2)\in E_1\times E_2$, $\|f(h_1,h_2)\|_F\leqslant M\,\|h_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2}$ avec $M\in\mathbb{R}_+^*$.

Cherchons la différentielle de f au point $(a_1,a_2)\in E_1\times E_2$.
$f(a_1+h_1,a_2+h_2)=f(a_1+h_1,a_2)+f(a_1+h_1,h_2)=f(a_1,a_2)+f(h_1,a_2)+f(a_1,h_2)+f(h_1,h_2)$
d'où $f(a_1+h_1,a_2+h_2)=f(a_1,a_2)+\underbrace{f(h_1,a_2)+f(a_1,h_2)}_{\text{applications linéaires continues}}+f(h_1,h_2)$
$\Rightarrow\frac{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)-f(h_1,a_2)+f(a,h_2)}{\|(h_1,h_2\|_{E_1\times E_2}}=\frac{f(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2\|_{E_1\times E_2}}$; $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2\|_{E_1\times E_2}}=0\,^?.$

On définit $\|(h_1,h_2)\|_{E_1\times E_2}=\|h_1\|_{E_1}+\|h_2\|_{E_2}$.

$\frac{f(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2\|_{E_1\times E_2}} \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ car $\frac{\|f(h_1,h_2)\|_F}{\|(h_1,h_2\|_{E_1\times E_2}} \leqslant M\frac{\|h_1\|_{E_1}\,||h_2\|_{E_2}}{\|h_1\|_{E_1}+||h_2\|_{E_2}} \leqslant M \begin{matrix}\|h_1\|_{E_1}\\ \text{ou}\\ \|h_2\|_{E_2}\end{matrix} \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

donc $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2\|_{E_1\times E_2}}=0$.

Conclusion : f bilinéaire continue sur $E_1\times E_2\to F$ est différentiable en tout point (a_1,a_2) et sa différentielle est définie par $df_{(a_1,a_2)}(h_1,h_2)=f(h_1,a_2)+f(a_1,h_2)$.

III. Dérivées partielles premières de f en $a\in\mathbb{R}$

Def 1 : Étant donnée $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ et $a\in\Omega$

On dit que f admet en a une $j^{\text{ième}}$ dérivée partielle première ssi la $j^{\text{ième}}$ application partielle $\varphi_{j,a}$ en a admet en a_j une dérivée, c'est à dire $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{\varphi_{j,a}(a_j+\rho)-\varphi_{j,a}(a_j)}{\rho}$ existe

Si cette limite existe, on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. ρ est un scalaire

Def 2 : On dit que $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ admet en $a\in\Omega$, une dérivée suivant le vecteur $\vec{v}\neq\vec{0}_{\mathbb{R}^n}$ ssi

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(a+\rho\vec{v})-f(a)}{\rho}$ existe ; si cette limite existe on la note $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{v}}(a)$.

Remarques :

- $(\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n})$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- $a+\rho\vec{e_j}=(a_1,a_2,\dots,a_j,\dots,a_n)+(0,\dots,\rho,0,\dots 0)=(a_1,a_2,\dots,a_{j-1},a_j+\rho,a_{j+1},\dots,a_n)$
- Dans la définition 2 on prend $\vec{v}=\vec{e_j}$ alors $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(a+\rho\vec{v})-f(a)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial\vec{e_j}}(a)$
  d'où $\frac{\partial f}{\partial\vec{e_j}}(a)=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(a+\rho\vec{e_j})-f(a)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\varphi_{j,a}(a_j+\rho)-\varphi_{j,a}(a_j)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.
  Ainsi $\forall j\in[\![1,n]\!]$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\frac{\partial f}{\partial\vec{e_j}}(a)}$.

Théorème : Si $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ est différentiable en a.

Alors f admet une dérivée suivant tout vecteur $\vec{v}\neq\vec{0}_{\mathbb{R}^n}$ en a, et donc en particulier ses dérivées partielles premières existent.

La réciproque est *fausse* : il peut exister toutes les dérivées partielles premières de f sans que f soit différentiable.

Démo :

Si f est différentiable en $a\in\Omega$ alors d'après la définition on a :
$\forall\, h\in\Omega\backslash a\quad f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\|h\|\,\varepsilon_a(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_a(h)=0$
On pose $h=\rho\vec{v}$, ρ scalaire, d'où $f(a+\rho\vec{v})=f(a)+df_a(\rho\vec{v})+\|\rho\vec{v}\|\,\varepsilon_a(\rho\vec{v})$
d'où $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(a+\rho\vec{v})-f(a)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho\,df_a(\vec{v})}{\rho}+\frac{|\rho|}{\rho}\,||\vec{v}\|\,\varepsilon_a(\rho\vec{v})=df_a(\vec{v})+\underbrace{\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{|\rho|}{\rho}\,\|\vec{v}\|\,\varepsilon_a(\rho\vec{v})}_{=0}$
d'où $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(a+\rho\vec{v})-f(a)}{\rho}=df_a(\vec{v})$ c'est à dire $\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(a)=df_a(\vec{v})$.
En particulier si $\vec{v}=\vec{e_j}$ on aura $\frac{\partial f}{\partial\vec{e_j}}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=df_a(a)$

Remarque importante :

1. Si f est différentiable en a alors f admet des dérivées partielles premières en a, elles « déterminent » df_a.
   On a : $\boxed{df_a(h)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,h_i}$ avec $h=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\,\vec{e_i}=(h_1,h_2,\dots,h_n)$.

   En effet : $df_a(h)=df_a\left(\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\,\vec{e_i}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\,df_a(\vec{e_i})=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2. f admet des dérivées partielles premières par rapport à chaque variable en $a\not\Rightarrow f$ différentiable en a.

Exemple : $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{array} \right. \end{array}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\,0) = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\varphi_{1,(0,0)}(0+\rho) - \varphi_{1,(0,0)}(0)}{\rho} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{f(0+\rho,0) - f(0,0)}{\rho} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0$ `on a pas de forme indéterminée ici car le numérateur est nul, c'est pas comme s'il tendait vers 0, il EST nul.`

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$

Si f était différentiable en $(0,0)$ alors on aurait $d\,f_{(0,0)}(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,h_2 = 0\,h_1 + 0\,h_2 = 0$

C'est à dire $d\,f_{(0,0)}$ serait l'application nulle, ainsi en utilisant la définition de la différentiabilité on devrait avoir : $\frac{f(0+h) - f(0) - d\,f_{(0,0)}(h)}{\|h\|} = \varepsilon_{(0,0)}(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ c'est à dire $\frac{h_1\,h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \underset{(h_1,h_2) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$

Ce qui n'est pas le cas car si on prend $h_1 = h_2$ on obtient $\frac{h_1^2}{\sqrt{2\,h_1^2}\sqrt{2\,h_1^2}} = \frac{1}{2} \underset{(h_1,h_2) \to (0,0)}{\not\longrightarrow} 0$

Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Que faut il ajouter à l'existance des dérivées partielles premières de f en a pour que f soit différentiable en a ?
La continuité des dérivées partielles ! Et on a alors le schéma suivant :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les d.p.p. existent sur } \Omega \\ \text{et sont continues en } a \\ \text{c'est à dire que } f \text{ est de } \mathcal{C}^1\end{array}} \Rightarrow \boxed{f \text{ est différentiable en } a} \begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{les d.p.p. de } f \\ \text{en } a \text{ existent}\end{array}} \\ \Rightarrow \boxed{f \text{ est continue en } a} \end{array}$$

Remarque : Calculer les dérivées partielles premières de $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x\;e^{xyz} + z^2 \end{array}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xyz} + x\,y\,z\,e^{xyz} + 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2\,z\,e^{xyz} + 0$; $\frac{\partial f}{\partial z} = x^2\,y\,e^{xyz} + 2\,z$

IV. Étude de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ayant des d.p.p. continues en a

IV.1. Théorème et Def : Toute application continue en $a \in \Omega$ est différentiable en a.

On dit alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $a \in \Omega$ (ou continument différentiable en a), elle est aussi continue en a.

Remarque : La réciproque n'est pas toujours vraie

C'est à dire qu'il existe des fonctions différentiables en a et non de classe $\mathcal{C}^1$ en a.

Démo dans le cas où $n = 2$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

Par hypothèse $\forall j \in \{1,2\}$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est continue en a, donc existe nécessairement sur un voisinage de a $(\mathcal{B}_o(a,r))$ sur laquelle les dérivées partielles existent.
On choisit $\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \text{Sup}(|x_1|,|x_2|)$.
Il s'agit alors d'étudier $\Delta = f(a+h) - f(a)$; $h \in \mathbb{R}^2$ avec $\|h\| < r$.

Comme on travaille sur $\mathbb{R}^2$ on prend $a = (\alpha,\beta)$ et $h = (k,l)$ ainsi :
$\Delta = f(\alpha+k, \beta+l) - f(\alpha,\beta) = \underbrace{f(\alpha+k,\beta+l) - f(\alpha,\beta+l)}_{\Delta_1} + \underbrace{f(\alpha,\beta+l) + f(\alpha,\beta)}_{\Delta_2}$.

Soit $\varphi_{1,(\alpha,\beta+l)}$ l'application associée à f au point $(\alpha,\ \beta+l)$. C'est une application d'une seule variable de dérivée $\varphi_1'(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha,\ \beta+l)$ qui existe sur $[\alpha,\ \alpha+k]$ et φ_1' est continue en α donc $\varphi_{1,(\alpha,\beta+l)}$ vérifie Taylor-Young à l'ordre 1 en α puisque $\varphi_{1,(\alpha,\beta+l)}$ est continue sur $[\alpha, \alpha+k]$ et est dérivable en α.

D'où $\Delta_1 = f(\alpha+k,\ \beta+l) - f(\alpha,\ \beta+l) = \varphi_{1,(\alpha,\beta+l)}(\alpha+k) - \varphi_{1,(\alpha,\beta+l)}(\alpha) = k\,\varphi'_{1,(\alpha,\beta+l)}(\alpha) + k\,\varepsilon_1'(k)$ avec $\lim\limits_{k\to 0} \varepsilon_1'(k) = 0$. D'où $\Delta_1 = k\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha,\beta+l) + k\,\varepsilon'(k)$.
Or $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est continue sur $[(\alpha,\beta),(\alpha,\beta+l)] \subset \mathcal{B}(a,r) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha,\beta+l) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha,\beta) + \varepsilon''(l)$ avec $\lim\limits_{l \to 0} \varepsilon''(l) = 0$.
D'où $\Delta_1 = k\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha,\beta) + k\,\varepsilon_1(h)$ où $\varepsilon_1(h) = \varepsilon_1'(k) + \varepsilon_2''(l)$.

Étude de Δ_2 :
On fait pareil en introduisant $\varphi_{2,(\alpha,\beta)}$ qui est dérivable sur $[\beta,\beta+l]$ avec $\varphi'_{2,(\alpha,\beta)}(\beta) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\alpha,\beta)$
$\varphi_{2,(\alpha,\beta)}$ vérifie Taylor-Young à l'ordre 1 en β
D'où $\Delta_2 = f(\alpha,\beta+l) - f(\alpha,\beta) = \varphi_{2,(\alpha,\beta)}(\beta+l) - \varphi_{2,(\alpha,\beta)}(\beta) = l\,\varphi'_{2,(\alpha,\beta)}(\beta) + l\,\varepsilon_2(l)$ avec $\lim\limits_{l\to 0} \varepsilon_2(l) = 0$.

Or $f(a+h)-f(a)=\Delta_1+\Delta_2 \Rightarrow f(a+h)=f(a)+k\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha,\beta)+l\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(\alpha,\beta)+\underbrace{k\,\varepsilon_1(h)+l\,\varepsilon_2(h)}_{\hookrightarrow 0 \text{ quand } h\to 0}$
$\Rightarrow f$ est différentiable en $a=(\alpha,\beta)$.

Conséquences importantes : Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$; f différentiable en a. $(\vec{e_1},\ldots\vec{e_n})$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On sait que $df_a(h)=df_a\left(\sum_{i=1}^n h_i\,\vec{e_i}\right)=\sum_{i=1}^n h_i\,df_a(\vec{e_i})=\sum_{i=1}^n h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ avec $h\in\mathbb{R}^n \Rightarrow h=\sum_{i=1}^n \vec{e_i}$

Or $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p\\ x=(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(\ f_1(x),\ldots,f_p(x)\ )\end{array}$. $\rightsquigarrow f=\sum_{i=1}^p f_j\,\vec{u_j}$
Soit $(\vec{u_1},\ldots,\vec{u_p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ alors $f(x)=\sum_{j=1}^p f_j(x)\,\vec{u_j} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\vec{u_j}$.

D'où $df_a(h)=\sum_{i=1}^n h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\sum_{i=1}^n h_i\sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,\vec{u_j}=\boxed{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,\vec{u_j}=df_a(h)}$ (*)

Application :

- $n=2$ et $p=1$ $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donc $df_a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $df_a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
  $df_a(h)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,\vec{u_j}=df_a(h)=\sum_{i=1}^2 h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,h_2$

- $n=2$ et $p=3$ $\quad f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\\ x=(x_1,x_2)=(\ f_1(x),f_2(x),f_3(x)\ )\end{array} \Rightarrow df_a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$
  (*) $\Rightarrow df_a(h)=\sum_{i=1}^2 h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=h_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$
  $=h_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}(f_1(a)\,\vec{u_1}+f_2(a)\,\vec{u_2}+f_3(a)\,\vec{u_3})+h_2\,\frac{\partial}{\partial x_2}(f_1(a)\,\vec{u_1}+f_2(a)\,\vec{u_2}+f_3(a)\,\vec{u_3})$
  $=\left(h_1\,\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)+h_2\,\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a)\right)\vec{u_1}+\left(h_1\,\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a)+h_2\,\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a)\right)\vec{u_2}+\left(h_1\,\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a)+h_2\,\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a)\right)\vec{u_3}$
  $=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}h_2\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}h_2\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}h_2\end{pmatrix}$. Donc pour déterminer df_a quand $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ on doit déterminer la matrice formée par les dérivées partielles de f.

IV.2. Def : Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ avec $p>1$.

On appelle matrice **Jacobienne** de f en a la matrice de df_a par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.
On la note $\mathcal{M}_a(f)=\mathcal{M}(df_a)\in\mathcal{M}_{p,n}$. C'est une matrice à p lignes et n colonnes ainsi :
$\mathcal{M}(df_a)=\mathcal{M}_a(f)=\left(\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ \right)$ où i est le numéro de la ligne et j celui de la colonne.

Exemple : Si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ $\quad \mathcal{M}_a(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3}\end{pmatrix}$.

IV.3. Propriétés de focntions de classes $\mathcal{C}^1$

Soit $\varphi_1(\Omega\subset\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des applications $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

On montre que $\varphi_1(\Omega\subset\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
$\forall j\in[\![1,n]\!]$ $\quad \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda f+\mu g)=\lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial f}{\partial x_j}$.
Si de plus $p=1$ c'est à dire on est dans $\varphi_1(\Omega\subset\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ on a :
$\forall j\in[\![1,n]\!]$ $\quad \frac{\partial(f\times g)}{\partial x_j}=f\,\frac{\partial g}{\partial x_j}+g\,\frac{\partial f}{\partial x_j}$ et $\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x_j}=-\,\frac{1}{f^2}\,\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

V. Composition de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème : Soit E,F et G trois e.v.n. de dimension finie.

Si $f:E\to F$ est différentiable en $a\in E$ et $g:F\to G$ est différentiable en $b=f(a)$, alors $g\circ f$ est différentiable en a et on a : $d(g\circ f)_a=dg_{f(a)}\circ df_a$ et $\mathcal{M}_a(g\circ f)=\mathcal{M}_{f(a)}(g)\times\mathcal{M}_a(f)$.

Démo : f différentiable en $a\Leftrightarrow f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\|h\|\,\varepsilon_1(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$

g différentiable en $b \Leftrightarrow g(b+h) = g(b) + dg_b(h) + \|h\|\,\varepsilon_2(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$

$$\begin{aligned} g\circ f(a+h) &= g(f(a) + df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)) \\ &= g(b) + dg_b(df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)) + \|df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\| \cdot \varepsilon_2(df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)) \\ &= g(b) + dg_b\circ df_a(h) + \|h\|\,dg_b(\varepsilon_1(h)) + \|h\|\left\|df_a\left(\tfrac{h}{\|h\|}\right) + \varepsilon_1(h)\right\| \cdot \varepsilon_2(df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)) \\ &= g\circ f(a) + d\,g_b\circ df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_3(h) \\ &\quad \text{où } \varepsilon_3(h) = dg_b(\varepsilon_1(h)) + \left\|df_a\left(\tfrac{h}{\|h\|}\right) + \varepsilon_1(h)\right\| \cdot \varepsilon_2(df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)) \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $\lim_{h\to 0} \varepsilon_3(h) = 0$ car

- $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et dg_b continue $\Rightarrow \lim_{h\to 0} dg_b(\varepsilon_1(h)) = 0$
- $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et df_a bornée sur la sphère unité de E qui est compacte (la sphère) car E est de dimension finie, et df_a est continue $\Rightarrow \left\|df_a\left(\tfrac{h}{\|h\|}\right) + \varepsilon_1(h)\right\|$ est bornée au voisinage de 0.

Et enfin df_a continue, $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0$
donc finalement on fait $g\circ f(a+h) = g\circ f(a) + \big(dg_{f(a)}\circ df_a\big)(h) + \|h\|\,\varepsilon_3(h)$.

Conclusion : $\boxed{d(g\circ f)_a = dg_{f(a)}\circ df_a \Rightarrow \mathcal{M}_a(g\circ f) = \mathcal{M}_{f(a)}(g) \times \mathcal{M}_a(f)}$

Corollaire : $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $\xrightarrow{g\circ f}$

Remarque : $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow dg_a = g'(a)$
On sait que $d(g\circ f)_a = dg_{f(a)}\circ df_a = g'(f(a)) \times df_a$

Exemple d'application :

1. Calculer dh_a où $h: \begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{f(x)}\end{array}$ $\quad h = g\circ f$ où $g: x \mapsto e^x$
   D'où $dh_a = d(g\circ f)_a = dg_{f(a)}\circ df_a = g'(f(a)) \times df_a = e^{f(a)} \times df_a$

2. $h: \begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Arctan}(f(x))\end{array}$ $\qquad$ Soit $g: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)\end{array}$
   $dh_a = d(g\circ h)_a = g'(f(a)) \times df_a = \frac{1}{1+f^2(a)}\,df_a$

Corollaire 2 : Soit
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}^p & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (f_1(x), \dots f_p(x)) = y = (y_1, \dots, y_p) & \mapsto & g(y) = z \end{array}$$
$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{g\circ f}$

C'est à dire on a définit $g\circ f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) = g(f_1(x), \dots, f_p(x))\end{array}$

On a la relation $\boxed{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f_1(x), \dots, f_p(x)) \times \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)}$

Exemple : Soit $g: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x+y, x-y)\end{array}$; $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin(x^2 - y^2)\end{array}$

Calculer les dérivées partielles de $f\circ g$.

Première façon :

On a $f\circ g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $\qquad f\circ g(x, y) = f(g(x, y)) = f(x+y, x-y) = \sin(4\,x\,y)$
$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(x, y) = 4\,y\cos(4\,x\,y)$; $\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x, y) = 4\,x\cos(4\,x\,y)$

$$\begin{array}{ccccc} & g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & & f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x, y) & \mapsto & g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)) = (X, Y) & \mapsto & f(X, Y) = \sin(X^2 - Y^2) \end{array}$$
$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{f\circ g}$

Avec $g_1(x, y) = x + y$ et $g_2(x, y) = x - y$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial X}(g(x, y)) \times \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial Y}(g(x, y)) \times \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}(g(x, y)) \times 1 + \frac{\partial f}{\partial Y}(g(x, y)) \times 1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X}(x+y, x-y) + \frac{\partial f}{\partial Y}(x+y, x-y) \\ &= 2\,(x+y)\cos((x+y)^2 - (x-y)^2) + (-2)\,(x-y)\cos((x+y)^2 - (x-y)^2) \\ &= 4\,y\cos(4\,x\,y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial X}(g(x,y))\times\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial Y}(g(x,y))\times\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)$$
$$= 4\,x\cos(4\,x\,y)$$

Deuxième façon :

Matriciellement on sait que $\mathcal{M}_{(x,y)}(f\circ g)=\mathcal{M}_{g(x,y)}(f)\times\mathcal{M}_{(x,y)}(g)$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,(x+y)\cos(4\,x\,y) & -2\,(x-y)\cos(4\,x\,y)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4\,y\cos(4\,x\,y) & 4\,x\cos(4\,x\,y)\end{pmatrix}$$

VI. Inégalité des accroissements finis

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f:\mathbb{R}^n\to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Pour tout $a,b\in U$ tels que le segment $[a,b]=\{a+t\,(b-a)\quad \text{avec } t\in[0,1]\}$ soit inclus dans U.
On a $\|f(b)-f(a)\|\underset{(*)}{\leqslant} M\,\|b-a\|$ où $M=\underset{x\in[a,b]}{\operatorname{Sup}}\|d\,f_x\|$
Posons $h=b-a$ c'est à dire $b=h+a$ alors (*) devient $\|f(a+b)-f(a)\|\leqslant M\,\|h\|$

Démo : Soit $\varphi:\begin{array}{l}[0,1]\to F\\ t\mapsto f(a+t\,h)\end{array}\Rightarrow\forall t\in[0,1]\quad\varphi(t)=f\circ g(t)$ où $g:\begin{array}{c}[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n\\ t\mapsto a+t\,h=(a_1+t\,h_1,\ldots,a_n+t\,h_n)\\ \|\\ g_1(t),\ldots,g_n(t)\end{array}$

$$\underbrace{[0,1]\xrightarrow{g}\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}F}_{\varphi=f\circ g}$$

On a alors $t\mapsto a+t\,h=x\mapsto f_a(x)$
$$\begin{array}{c}\|\\(g_1(t),\ldots,g_n(t))\end{array}$$
φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
$\varphi'(t)=\frac{\partial}{\partial t}(f\circ g(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))\times\frac{\partial g_i}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+t\,h)\,h_i=d\,f_{a+th}(h)$
Or $f(a+h)-f(a)=\varphi(1)-\varphi(0)=\int_0^1\varphi'(t)\,dt=\int_0^1 d\,f_{a+th}(h)\,dt$
D'autre part $\forall t\in[0,1]\quad\|\varphi'(t)\|=\|d\,f_{a+th}(h)\|\leqslant\|d\,f_{a+th}\|\cdot\|h\|\leqslant M\,\|h\|$
D'où $\|f(a+h)-f(a)\|=\left\|\int_0^1 d\,f_{a+th}(h)\,dt\right\|\leqslant\int_0^1\|d\,f_{a+th}\|\,dt\leqslant\int_0^1\|d\,f_{a+th}\|\,\|h\|\,dt\leqslant\int_0^1 M\,\|h\|\,dt$
$=M\,\|h\|\int_0^1 dt=M\,\|h\|$

Théorème : Une C.N.S. pour que $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ouvert convexe, soit constante

est que $\forall\,x\subset\Omega$, $d\,f_x=0$.

Démo : Si f est contante sur Ω et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega\Rightarrow\forall x\in\Omega,\forall j\in[\![1,n]\!]$ on a $\frac{\partial f}{\partial x_j}=0\Rightarrow\forall x\in\Omega\ d\,f_x=0$.

Réciproque : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ouvert convexe et telle que $d\,f_x=0$ pour tout $x\in\Omega$,

alors $\|d\,f_x\|$ est majorée par 0

On prend $M=0$ dans la formule (*) $\Rightarrow\|f(b)-f(a)\|\leqslant 0\cdot\|b-a\|\Rightarrow\|f(b)-f(a)\|=0\Rightarrow f(b)=f(a)$.
On fixe a et on fait varier b dans $\Omega\Rightarrow f(b)=$ *constante* et donc f est constante.

VII. Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

VII.1. Dérivées partielles d'ordre 2

Si $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ et il existe $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ pour tout $x\in\Omega$.

C'est à dire on a défini : $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}:\Omega\to\mathbb{R}^p$; On peut définir $\dfrac{\partial}{\partial x_p}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right](x)$ qu'on notera $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_p}(x)$.

Def : On dit qu'une fonction $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω

ssi toutes les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur Ω.

Théorème de Schwarz : Étant donné $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$.

Si f admet en $x\in\Omega$ des dérivers partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_p}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_j}$ toutes deux continues, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_p}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_j}$.

Exemple : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\frac{x\,y^2}{x+y}$ si $x\neq -y$ et $f(x,y)=0$ si $x=-y$.

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Que peut-on conclure ?

Remarque : $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0,0)$

En chaque point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $x\neq -y$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{(x+y)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2\,y\,x^2+x\,y^2}{(x+y)^2}$

De plus $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=g}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{g(0,y)-g(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{y^3}{y^2}-0}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y^3}{y^3}=1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$

On constate que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)\Rightarrow$ l'une au moins des dérivées partielles secondes croisées n'est pas continue en $(0,0)$.

VIII. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f de $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega\subset\mathbb{R}^n$

Soit f de $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^n$; soit $a\in\Omega$ et $\varphi:\begin{array}{l}[0,1]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\varphi(t)=f(a+t\,h)\end{array}\Rightarrow\forall t\in[0,1]\ \ \varphi(t)=f\circ g(t)=f(a+t\,h)$

où $\begin{array}{ccccc}[0,1] & \xrightarrow{\quad g\quad} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad f\quad} & \mathbb{R}\\ t\mapsto a+t\,h=(g_1(t),\ldots,g_n(t))=x & & \mapsto & & f(x)=f(a+t\,h)\end{array}$

$\underset{a_1+t\,h_1,\ldots a_2+t\,h_2}{\parallel}$

On a vu dans **VI.** que $\varphi'(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+t\,h)$.

On peut montrer que $\varphi''(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}h_j^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a+t\,h)+2\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}h_i\,h_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a+t\,h)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}h_i\,h_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a+t\,h)$.

La fonction φ est de $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ donc elle vérifie Taylor-Young sur $[0,1]$ c'est à dire :
$\exists\,\theta\in]0,1[$ tq $\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\underbrace{\frac{1}{2}(\varphi''(\theta)-\varphi''(0))}_{=R(h)}$.

Or $R(h)=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}h_i\,h_j\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a+\theta\,h)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\right)$.

De plus, $\|h\|_{\mathbb{R}^n}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i^2\Rightarrow|h_i|\leqslant\|h\|$.

$\Rightarrow|R(h)|\leqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|h_i|\,|h_j|\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a+\theta\,h)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\|h\|\,\|h\|\,\alpha_{ij}(h)$

$\Rightarrow|R(h)|\leqslant\frac{\|h\|^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0\Rightarrow\frac{|R(h)|}{\|h\|^2}\xrightarrow[h\to 0]{}\Rightarrow R(h)=\underset{h\to 0}{\circ}\left(\|h\|^2\right)$.

Théorème : Toute application f de $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^n$

vérifie en tout point $a\in\Omega$ la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 soit :

$(*)\ \ f(a+h)=f(a)+\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}h_i^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)+2\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}h_i\,h_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\right]+\circ\left(\|h\|^2\right)$.

Si on pose $x=a+h\Rightarrow h=x-a$, $(*)$ devient :

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)+2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(x_i-a_i)(x_j-a_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\right]+\circ\left(\|x-a\|^2\right)$$

Si de plus on prend $a=0$ alors on a :

$$f(x)=f(0)+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(0)+2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}x_i\,x_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(0)\right]+\circ\left(\|x\|^2\right)$$

Def : On dit que f admet un DL à l'ordre 2 en 0 ssi $\forall x\in\Omega \quad f(x)=f(0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\mu_{ij}x_i x_j+\circ\left(\|x\|^2\right)$

avec λ_i et μ_{ij} des constantes réelles.

Si f est de C^2 sur $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ alors f admet un DL à l'ordre 2 en tout point de Ω donné par Taylor-Young.

Cas particulier $n=2$: Soit f de $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega\subset\mathbb{R}^n$

Soit $(a,b)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$ avec les notations de Monge on a :

$p=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad ; \quad q=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \quad ; \quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \quad ; \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a,b) \quad ; \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$

Comme f vérifie Taylor-Young à l'ordre 2 en (a,b) on a alors :

$f(a+h,b+k)=f(a,b)+h\,p+k\,q+\frac{1}{2}\left(h^2 r+k^2 t+2\,h\,k\,s\right)+\circ\left(h^2+k^2\right)$ **(**)**

IX. Extremum d'une fonction f

Def : Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, on dit que f présente un extrêmum local ou relatif en $a\in\Omega$

ssi il existe un voisinage de a noté $V(a)$ tel que $\forall x\in V(a)$ on ait :

- soit $f(x)\leqslant f(a)\Rightarrow a$ est un maximum local
- soit $f(x)\geqslant f(a)\Rightarrow a$ est un minimum local

IX.1. Conditions nécessaires d'existence d'un extrêmum relatif

Théorème : Soit f de $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Une CN mais pas suffisante pour que f admette en a un extrêmum est que $d f_a=0$, c'est à dire :

$\forall j\in[\![1,n]\!] \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=0.$

Remarque : Ces conditions ne sont pas suffisantes.

En effet : Soit $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto x\,y\end{array}$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$

Mais f n'admet pas d'extrêmum local en (0,0) puisque tout voisinage V de $(0,0)$ contient les poitns pour lesquels on a $f(x,y)>f(0,0)$ en effet $f(-\varepsilon,-\varepsilon)=\varepsilon^2>f(0,0)$
et $f(x,y)<f(0,0)$ $\quad f(-\varepsilon,\varepsilon)=-\varepsilon^2<f(0,0)$

IX.2. Conditions suffisantes d'existence d'extremum

Def : Étant donnée f de $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, on dit que $a\in\Omega$ est un point critique de f ssi $d f_a=0$.

Théorème : Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $(a,b)\in\Omega$ un point critique de f tel que $s^2-r\,t$ existe (notations de Monge) alors :

- Si $s^2-r\,t<0$ et $r>0$ alors f présente un minimum en (a,b)
- Si $s^2-r\,t<0$ et $r<0$ alors f présente un maximum en (a,b)
- Si $s^2-r\,t>0$ alors le point (a,b) est appelé un point col pour f, c'est à dire que f ne présente en (a,b) ni maximum ni minimum.
- Si $s^2-r\,t=0$ alors on ne peut pas conclure.

Idée de la démo : Dans (**) on a $p=q=0$ car (a,b) est un point critique, de plus :

$f(a+h,b+k)=f(a,b)=\frac{1}{2}\left(h^2 r+2\,h\,k\,s+k^2 t\right)+\circ\left(h^2+k^2\right)$

Or $h^2 r+2\,h\,k\,s+k^2 t=r\left[h^2+\frac{2\,h\,k\,s}{r}+k^2 t\right]=r\left[h+\frac{h\,s}{r}\right]^2-r\,\frac{k^2 s^2}{r^2}+k^2 t=r\left[h+\frac{h\,s}{r}\right]^2-\frac{k^2}{r}\left(s^2-r\,t\right).$

Exemple : $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto x^3+3\,x\,y-15\,x-12\,y\end{array}$ Trouver les extrêmums de f.

On cherche les points critiques : $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(M)=0\\\frac{\partial f}{\partial y}(M)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3\,x^2+3\,y^2-15=0\\6\,x\,y-12=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=5\\x\,y=2\end{array}\right.$

$\Rightarrow P_1(2,1)$; $P_2(-2,-1)$; $P_3(1,2)$ et $P_4(-1,-2)$ sont des points critiques.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6\,x \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=6\,y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6\,x\;\Rightarrow\; s^2-r\,t=(6\,y)^2-6\,x\,6\,x=36\left(y^2-x^2\right)$

D'où pour P_3 et P_4, $s^2-r\,t=36\,(4-1)>0$. Pas d'extremum en P_3 et P_4.

Pour P_1, $s^2-r\,t=36\,(1-4)<0$ et $r=6\times 2>0$. f a un minimum en P_1.
Pour P_2, $s^2-r\,t=36\,(1-4)<0$ et $r=6\times(-2)<0$. f a un maximum en P_2.