TP - Simulation de nombres aléatoires

I- Simulateur de variables uniformes Le but de cette partie est de comparer la "qualité" de générateurs de nombres aléatoires suivant une loi uniforme. On a vu en cours que l'on peut "tester" les résultats donnés par un générateur de deux manières : avec des tests théoriques (période, discrépance, ...) et avec des tests empiriques (test statistique d'adéquation, QQ-Plot)... On va s'intéresser plus particulièrement aux générateurs congruentiels linéaires.

Introduction : une fonction chaotique (suite logistique)
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = rx(1-x)$$

où r est une constante réelle. On considère alors la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n); u_0 \in]0,1[$$

1. Générez les 100 premiers points de cette suite pour les valeurs de r : 1, 2.9, 3, 3.1, 3.5, 3.9, 3.999. Que semblez vous remarquer ?
2. Test empirique : Pour la dernière valeur de r, faites un QQ-Plot, éventuellement un test du Khi2
3. Test théorique : On ne va pas calculer la discrépance de cette suite, mais on peut en avoir un idée en faisant un graphique des points (u_n, u_{n+1}). Faites le. Que remarquez-vous ?

Générateur congruentiel linéaire
On considère les suites définies par

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m; a, c, X_0 \in]0, m[\text{ et } m \in \mathbb{N} \text{ et } Y_n = X_n/m$$

Du choix des paramètres va dépendre la "qualité" des nombres générés

1. Générez les 100 premiers points de la suite (X_n pour les valeurs suivantes du quadruplet (a, c, m, X_0) : (422,987,1024,641), (1,1,1024,0) que remarquez-vous ?
2. Générez les 100 premiers points de la suite Y_n pour $c = 0$, $m = 101$ et $a = 7$, 12 et 51
3. Test empirique : Pour la dernière valeur de a, faites un QQ-Plot, éventuellement un test du Khi2
4. Test théorique : Faite le graphique des points (Y_n, Y_{n+1}) pour ces 3 dernières familles de nombres. Que remarquez-vous ?
5. Reprenez ces questions avec le générateur de C (rand) : $m = 2^{31}$; $a = 1103515245$; $c = 12345$

II - Simulation de lois quelconques

En utilisant les résultats d'inversion de la fonction de répartition dans les cas discrets et continus vus en cours, faites les simulations de variables aléatoires suivantes.

1. Simulez 100 lancers d'un dé à 6 face classique ?
2. On considère un tiercé avec 15 chevaux partant, chacun ayant la même probabilité de gagner. Simuler 20 tiercé (20 triplets d'arrivée parmi les 15 chevaux)
3. La durée de vie d'une particule élémentaire suit une loi exponentielle de paramètre 3. Simulez la durée de vie de 100 particules. Quelle-est la durée de vie moyenne empirique de vos simulations ? Est-ce conforme à la théorie ?
4. On suppose que le prix de clôture quotidien d'une action cotée en bourse est donné par $S_{t+1} = S_t exp(\sigma * \sqrt{t} * N)$ où N est une variable aléatoire de loi Normale $N(0,1)$. En utilisant la formule de Box-Muller, simulez 20 trajectoires annuelles de cette action (on prendra comme écart-type annuel : 25%. Comme il y a 252 jours ouvrés dans l'année, $\dfrac{25}{\sqrt{252}}$ pour l'écart-type quotidien)