Probabilités - simulation

Abderrahim BOURHATTAS

4 janvier 2015

Expérience aléatoire et Espace échantillon

Définition

On appelle **expérience aléatoire** une expérience qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont le résultat ne peut être prévu à l'avance.

Définition

L'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience est appelé **espace échantillon** ou **univers**. Il est généralement noté Ω.

Les éléments de Ω sont les résultats possibles de l'expérience appelés aussi évènements élémentaires et généralement notés $\omega \in \Omega$

Exemples

- On lance une pièce : $\Omega = \{P, F\}$.
- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On compte le nombre d'appels arrivant dans un centre téléphonique pendant une journée : $\Omega = \mathbb{N}$.
- On étudie le groupe sanguin d'une personne tirée au hasard $\Omega = \{A, B, AB, O\}$.
- On étudie la durée de vie d'une bactérie : $\Omega = [0, +\infty[$.
- On étudie la durée d'une communication téléphonique : $\Omega = [0, +\infty[$.

Définition

Définition

On appelle évènement aléatoire tout sous-ensemble de Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.

Un évènement est donc une partie de Ω.

Exemples

- L'évènement : "le résultat du lancer de dé est pair" est représenté par l'ensemble : $A = \{2, 4, 6\}$.
- L'évènement : "le nombre d'appels reçus est inférieur à 3" est représenté par l'ensemble : $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
- L'évènement : " la durée d'une communication téléphonique est supérieure à 3 minutes " est représentée par : $A = [3, +\infty[$.

Evènements et opérations sur les ensembles

Les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements A et B,

- A n'est pas réalisé : A^c

Evènements et opérations sur les ensembles

Les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements A et B,

- A n'est pas réalisé : A^c
- A et B sont réalisés : $A \cap B$

Evènements et opérations sur les ensembles

Les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements A et B,

- A n'est pas réalisé : A^c
- A et B sont réalisés : $A \cap B$
- A ou B sont réalisés : $A \cup B$

Evènements et opérations sur les ensembles

Les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements A et B,

- A n'est pas réalisé : A^c
- A et B sont réalisés : $A \cap B$
- A ou B sont réalisés : $A \cup B$
- A réalisé $\Longrightarrow$ B réalisé : $A \subset B$.

Evènements et opérations sur les ensembles

Les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements A et B,

- A n'est pas réalisé : A^c
- A et B sont réalisés : $A \cap B$
- A ou B sont réalisés : $A \cup B$
- A réalisé $\Longrightarrow$ B réalisé : $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles : $A \cap B = \emptyset$.

Evènements et opérations sur les ensembles

Les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements A et B,

- A n'est pas réalisé : A^c
- A et B sont réalisés : $A \cap B$
- A ou B sont réalisés : $A \cup B$
- A réalisé $\Longrightarrow$ B réalisé : $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles : $A \cap B = \emptyset$.
- Ω est l'événement certain (toujours vrai).

Evènements et opérations sur les ensembles

Les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements A et B,

- A n'est pas réalisé : A^c
- A et B sont réalisés : $A \cap B$
- A ou B sont réalisés : $A \cup B$
- A réalisé $\Longrightarrow$ B réalisé : $A \subset B$.
- A et B sont incompatibles : $A \cap B = \emptyset$.
- Ω est l'événement certain (toujours vrai).
- $\emptyset$ est l'événement impossible (jamais vrai).

Ensemble des évènements

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les événements. Il modélise l'information que l'on peut obtenir à partir des résultats de l'expérience.
On peut avoir dans certains cas $\mathcal{T} = P(\Omega)$, ensemble de toutes les parties de Ω mais ce n'est pas toujours le cas.

Remarque

Pour que la modélisation soit cohérente, $\mathcal{T}$ doit être stable par les opérations ensemblistes :
Si A et B sont des évènements ($\in \mathcal{T}$), on doit avoir
$A^c \in \mathcal{T} \quad , \quad (A \cup B) \in \mathcal{T} \quad , \quad (A \cap B) \in \mathcal{T}$ et également $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$.

Tribu

Définition

On appelle **tribu** ou σ-**algèbre** sur Ω toute famille de parties de Ω, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$.
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A \in \mathcal{T} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{T}$.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est alors appelé **un espace probabilisable**.

Exemples

- $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ est appelée tribu grossière.
- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu la plus fine.
- Si $A \subset \Omega$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu.

Définition

Définition

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ (ou loi de probabilité) toute application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{T}$ dans $[0, 1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'événements incompatibles, alors : $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est alors appelé **espace probabilisé**.

Conséquences

La définition de $\mathbb{P}$ a pour conséquences :

- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Probabilité sur Ω fini

Lorsque ω est fini, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, On prend toujours $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.
La probabilité $\mathbb{P}$ est alors défini par la donnée de n valeurs $p_1, p_2, ..., p_n$ avec $0 \leq p_i \leq 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Exemple

Pour une pièce truquée
$\Omega = \{P, F\}$, $\quad p_1 = \mathbb{P}(P) = 4/9$, $\quad p_2 = \mathbb{P}(F) = 5/9$.
La probabilité d'un évènement A est alors $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{\omega_i \in A} p_i = 1$.

Probabilité Uniforme sur Ω fini

On parle de modèle uniforme lorsque chaque singleton ω de Ω a la même chance de réalisation.

Définition

On dit que la probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace fini Ω est uniforme si :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad p_\omega = P(\omega) = \frac{1}{card(\Omega)}.$$

Dans ce cas, on a donc
$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$
Le calcul des probabilités se ramène alors à du calcul combinatoire.

Analyse combinatoire de base

Si $card(E) = n$,

- les éléments de $E^p = E \times E \times \ldots \times E$ sont des $p-$listes $=$ tirages successifs avec remise de p éléments de E. Leur nombre est : $card(E^p) = n^p$,
- les tirages successifs sans remise de p éléments de $E =$ arrangements de p parmi n. Leur nombre est donné par : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$,
- Les tirages simultanés de p éléments de E, ou parties à p éléments de $E =$ combinaisons de p parmi n. Leur nombre est donné par : $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$,

Probabilité sur Ω infini dénombrable

Lorsque Ω est infini dénombrable, $\Omega = \{\omega_i, \quad i \in \mathbb{N}\}$, On prend toujours $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.
La probabilité $\mathbb{P}$ est alors défini par une suite de valeurs $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = 1$.

Exemple 1

On lance une pièce équilibrée et on compte le nombre de lancers avant le première obtention de PILE, $\Omega = \mathbb{N}$ et $p_i = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.

Probabilité Uniforme sur Ω infini dénombrable

Exemple 2 (loi de POISSON de paramètre θ)

Loi très importante. Permet de modéliser :

- le nombre d'appels reçus dans un centre téléphonique pendant une certaine durée
- le nombre de voitures passant une barrière donnée pendant une certaine durée
- le nombre de clients servis dans un guichet pendant une certaine durée.

Dans tous ces cas, on prend : $\Omega = \mathbb{N}$ et $p_i = e^{-\theta} \dfrac{\theta^i}{2^i!}$

Fonction densité sur $\Omega = I$ intervalle de $\mathbb{R}$

Lorsque Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, on prend toujours la tribu des boréliens notée $\mathcal{B}$. On a donc $\mathcal{T} = \mathcal{B}_\Omega$.

Définition

La probabilité, $\mathbb{P}$, est définie par la donnée d'une fonction densité $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ verifiant 3 propriétés :

- $\forall x \in \Omega, \quad f(x) \geq 0.$
- f possède un nombre fini de discontinuités dans chaque intervalle borné de Ω.
- f est intégrable et $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx = 1$.

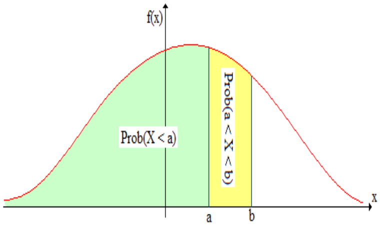
Probabilité sur Ω continu

Définition

La probabilité est alors définie par :

$$\mathbb{P} : \mathcal{B}_\Omega \longrightarrow [0,1]$$

$$A \longmapsto \mathbb{P}(A) = \int_A f(x)dx$$



Exemple

Exemple (loi exponentielle de paramètre λ)

Cette loi modèlise la durée(en mois) avant la 1ère panne d'un équipement.

- $\Omega = [0, +\infty[$
- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- La probabilité que la panne arrive avant le 5ème mois est : $\mathbb{P}([0,5]) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-5\lambda}$.

Probabilité conditionnelle

Définition

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $B \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité de A sachant que B est réalisé définit une nouvelle probabilité $\mathbb{P}_B$ par $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Propriétés

- $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité, elle vérifie $\mathbb{P}_B(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)$

Formule des probabilités totales

Probabilités totales

Si $(B_1, B_2, ...B_n)$ est une partition de Ω avec $\mathbb{P}(B_i) > 0$, alors :

- $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{B_i}(A)\mathbb{P}(B_i)$.
- En particulier si $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$.

Formule de Bayes

Formule de Bayes

On peut maintenant inverser les probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \times \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

Evènements indépendants

Définition

On dit que deux événements A et B sont indépendants si : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Conséquences

- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants tout comme $\overline{B}$ et A puis $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

variable aléatoire réelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire (sous-entendu à valeur réelle) toute application : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall \quad I \quad$ intervalle de $\mathbb{R}$, $\quad X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$.

Intérêt

- Issues de Ω difficiles à représenter remplacés par des réels.
- structure probabilistique de Ω transportée vers $\mathbb{R}$. On travaille sur Ω comme si on travaillait sur $\mathbb{R}$.

Exemples

- Lancer de 2 dés, $\Omega = \{(i,j), \quad 0 \leq i,j \leq 6\}$, si on retient seulement la somme, on définit la v.a. $X((i,j)) = i + j$.
- On lance 25 fois une pièce et on compte le nombres de "PILE".
- On observe les déplacements des voyageurs dans un aéroport et on retient le nombre de personnes qui sortent par la porte numéro 3.

Loi de probabilités, fonction de répartition

Si on pose $F = X(\Omega) = \{X(\omega), \quad \omega \in \Omega\}$, l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ permet de définir une probabilité sur F.

Définition

Pour tout $B \subset F$ tel que $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, on pose :
$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \in B\})$.
P_X est une probabilité sur F appelée loi de probabilité de X.
La fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = P(X \leq x)$

Exemple

exponent Lorsque X représente la somme de deux dés, $F = \{2; 3; ....; 12\}$.

- Si on prend $B = \{5\}$, $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$

$=\mathrm{P}(\{(i,j) \in \Omega, \quad X(i,j)) = i + j = 5\}) = P(\{(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$.

- Si $B = \{11, 12\}$, alors $P_X(B) = \frac{1}{12}$.
- $F_X(3) = P(X \leq 3) = P(\{(i,j) \in \Omega, \quad X(i,j)) = i + j \leq 3\}) = \frac{1}{12}$.
- $F_X(1) = 0$ et $F_X(18) = 1$.Lois continues usuelles

variable discète

Définition

Une variable aléatoire est dite discrète si $F = X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. $F = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Loi de probabilité déterminée par la suite des $p_i = P_X(\{x_i\}) = P(X = x_i)$ ou sous la forme d'un tableau :

valeurs de X	x_1	...	x_n	...
probabilité	p_1	...	p_n	...

Fonction de répartition = fonction en escalier donnée par :

$$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Exemple

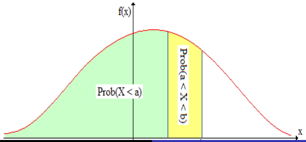
Exemple

On classe les issues de Ω en 2 catégories : succès ou échec.
$X(\omega) = 1$ en cas de succès et $= 0$ sinon.
On obtient la v.a. de Bernouilli, notée $\mathcal{B}(p)$, dont la loi de probabilités est : $P_X(1) = P(X = 1) = p$ et $= P_X(0) = P(X = 0) = 1 - p$.

variable continue

Définition

Une variable aléatoire est dite continue si $F = X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Loi de probabilité déterminée par une fonction densité f_X. Pour A intervalle de $\mathbb{R}$, $P(A) = \int_A f_x(t)dt$.
Fonction de répartition : $F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$.



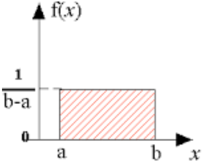
Exemple

Exemple

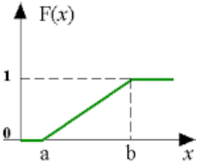
$$f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

permet de définir la loi uniforme sur $[a, b]$ notée $\mathcal{U}(a, b)$.

Fonction de répartition : $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$



Fonction de densité de probabilité



Fonction de répartition

Espérance

Définition

Si X est discrète, et $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| p_\omega$ est convergente, l'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X) = \sum x_i P(X = x_i)$$

Si X est continue, de densité f_X, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t) dt$ est convergente, l'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

Exemples

Exemples

- Espérance de la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$:
  $\mathbb{E}(X) = \sum x_i P(X = x_i) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p.$
- Espérance de la loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$:
  $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt = \frac{a+b}{2}$$

Propriétés de l'espérance

On note $\mathbb{L}^1$ l'ensembles de v.a. X telles que $\mathbb{E}(X)$ est fini.

- Linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$

Propriétés de l'espérance

On note $\mathbb{L}^1$ l'ensembles de v.a. X telles que $\mathbb{E}(X)$ est fini.

- Linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu\mathbb{E}(Y)$
- Positivité : $X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$

Propriétés de l'espérance

On note $\mathbb{L}^1$ l'ensembles de v.a. X telles que $\mathbb{E}(X)$ est fini.

- Linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu\mathbb{E}(Y)$
- Positivité : $X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$
- Croissance : $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

Propriétés de l'espérance

On note $\mathbb{L}^1$ l'ensembles de v.a. X telles que $\mathbb{E}(X)$ est fini.

- Linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu\mathbb{E}(Y)$
- Positivité : $X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$
- Croissance : $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- Continuité : $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$

Propriétés de l'espérance

On note $\mathbb{L}^1$ l'ensembles de v.a. X telles que $\mathbb{E}(X)$ est fini.

- Linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$
- Positivité : $X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$
- Croissance : $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- Continuité : $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $\mathbb{E}(X) = a$

Propriétés de l'espérance

On note $\mathbb{L}^1$ l'ensembles de v.a. X telles que $\mathbb{E}(X)$ est fini.

- Linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$
- Positivité : $X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$
- Croissance : $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- Continuité : $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $\mathbb{E}(X) = a$
- Si Ω fini, toutes les v.a. sont dans $\mathbb{L}^1$.

Propriétés de l'espérance

On note $\mathbb{L}^1$ l'ensembles de v.a. X telles que $\mathbb{E}(X)$ est fini.

- Linéarité : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$
- Positivité : $X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$
- Croissance : $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
- Continuité : $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $\mathbb{E}(X) = a$
- Si Ω fini, toutes les v.a. sont dans $\mathbb{L}^1$.

Variance

Définition

Si $\mathbb{E}(X) = m$ et que la v.a. X^2 possède une espérance i.e. $X^2 \in \mathbb{L}^1 \iff X \in \mathbb{L}^2$, la variance de X est :

$$Var(X) = \mathbb{E}((X - m)^2)$$

Cas discret : $Var(X) = \sum (x_i - m)^2 P(X = x_i)$.

Cas continue, avec densité f_X : $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - m)^2 f_X(t) dt$.

Théorème(Formule de Koenig)

On montre que $Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

Exemples

Exemples

- Pour $\mathcal{B}(p)$:
  $\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 P(X = x_i) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) = p.$
  $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - m^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- Pour $\mathcal{U}(a, b)$:
  $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt = \int_a^b \frac{t^2}{b-a}dt = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$
  $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - m^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$

Propriétés de la variance

- Positivité : Pour toute v.a. X, on a $Var(X) \geq 0$

Propriétés de la variance

- Positivité : Pour toute v.a. X, on a $Var(X) \geq 0$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $Var(X) = 0$

Propriétés de la variance

- Positivité : Pour toute v.a. X, on a $Var(X) \geq 0$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $Var(X) = 0$
- Quadratique : $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$

Propriétés de la variance

- Positivité : Pour toute v.a. X, on a $Var(X) \geq 0$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $Var(X) = 0$
- Quadratique : $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$
- Transfo. affine : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Propriétés de la variance

- Positivité : Pour toute v.a. X, on a $Var(X) \geq 0$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $Var(X) = 0$
- Quadratique : $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$
- Transfo. affine : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- Somme : Si X et Y sont indépendantes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Propriétés de la variance

- Positivité : Pour toute v.a. X, on a $Var(X) \geq 0$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $Var(X) = 0$
- Quadratique : $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$
- Transfo. affine : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- Somme : Si X et Y sont indépendantes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
- Combinaison linéaire : Si X et Y sont indépendantes, $Var(\lambda X + \mu Y) = \lambda^2 Var(X) + \mu^2 Var(Y)$

Propriétés de la variance

- Positivité : Pour toute v.a. X, on a $Var(X) \geq 0$
- V.a. constante : Si $X = cste = a$, alors $Var(X) = 0$
- Quadratique : $Var(\lambda X) = \lambda^2 Var(X)$
- Transfo. affine : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- Somme : Si X et Y sont indépendantes,
  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
- Combinaison linéaire : Si X et Y sont indépendantes,
  $Var(\lambda X + \mu Y) = \lambda^2 Var(X) + \mu^2 Var(Y)$
- Ecart-type : $\sigma = \sqrt{Var(X)}$. La variance est généralement notée σ^2.

Lois discrètes usuelles

Lois discrètes usuelles
définies par les valeurs prises et la loi de probabilité.

Loi uniforme

Exemple : dé équilibré.

$$X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, ..., n\})$$

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$
- $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{(2n+1)(n+1)}{6}$
- $Var(X) = \dfrac{(n+1)(n-1)}{12}$

Loi de Bernouilli de paramètre p

Expérience aléatoire réduite à une distinction entre succès ($X = 1$) et échec ($X = 0$).

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

$$P(X = 1) = p \ \text{ et } \ P(X = 0) = 1 - p$$

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $\mathbb{E}(X^2) = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$

Loi binomiale paramètres n et p

On répète n fois, de manière indépendante, une expérience de Bernouilli et on compte le nombre de succès.

$$X \sim \mathcal{B}(n,p)$$

$$X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\} \quad \text{et} \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- $\mathbb{E}(X) = np$
- $Var(X) = np(1-p)$
- $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ avec les Y_i indépendantes et $Y_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Loi géométrique de paramètre p

On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur FACE est p.
X désigne le nombre de lancers pour obtenir le premier FACE.

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
- $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{1}{p}$
- $Var(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Loi de Poisson de paramètre λ

Sert à modéliser le nombre d'occurences d'un évènement rare pendant une durée donnée.

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $\mathbb{E}(X^2) = \lambda + \lambda^2$
- $Var(X) = \lambda$

Lois continues usuelles

Lois continues usuelles
définies par leur densité, dont on tire la fonction de répartition.

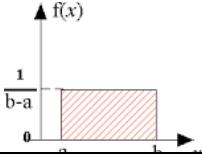
Loi uniforme sur $[a, b]$

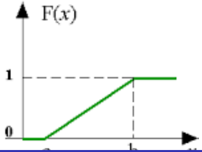
Simulée par les fonctions rand ou random ou alea de certains programmes.

$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

Densité : $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$





Loi uniforme sur $[a, b]$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \dfrac{(b-1)^2}{12}$

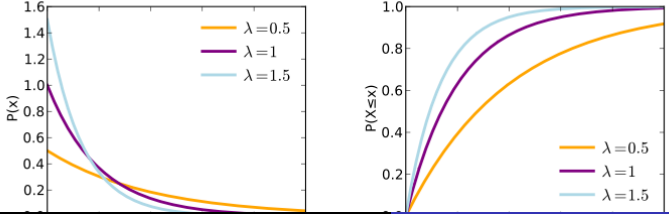
Loi exponentielle de paramètre θ

Modélise la durée avant la première panne.

$$X \sim \mathcal{E}(\theta)$$

Densité : $f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si} \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{si} \quad x \in [0, +\infty[\end{cases}$



Loi exponentielle de paramètre θ

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\theta}$
- $Var(X) = \dfrac{1}{\theta^2}$

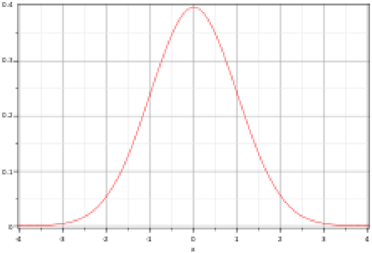
Loi normale centrée réduite

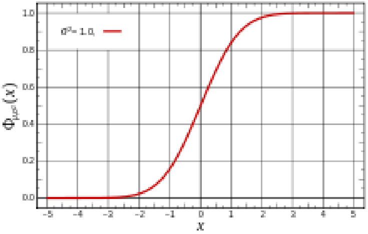
Généralement notée Z

$$X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Densité : $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Fonction de répartition (notée Φ) : Pas d'expression analytique



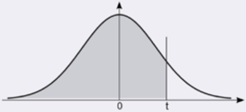


Loi normale centrée réduite

- $\mathbb{E}(X) = 0$ donc centrée
- $Var(X) = 1$ donc réduite ($\sigma = 1$)

Table loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Table donnant P(Z<t) pour une variable aléatoire suivant N(0,1)



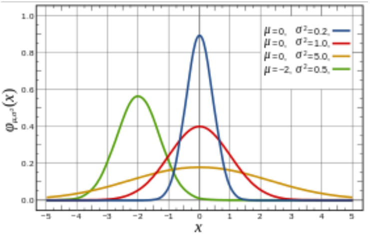
	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545

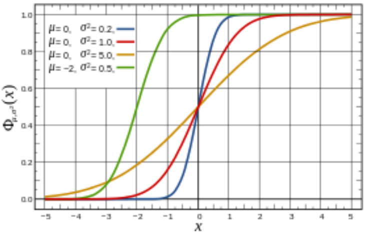
Loi normale générale, paramètres μ et σ

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Densité : $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Fonction de répartition : Pas d'expression analytique





Loi normale générale

- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$
- Transformation affine $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Somme de lois normales

Résultat admis

Soient X_1 et X_2 deux v.a. normales indépendantes.
$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors :

- $\lambda X_1 \sim \mathcal{N}(\lambda\mu_1, \lambda^2\sigma_1^2)$
- $X_1 + a \sim \mathcal{N}(\mu_1 + a, \sigma_1^2)$
- $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- $\alpha X_1 + \beta X_2 \sim \mathcal{N}(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2, \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2)$

Exercice de la semaine

Peut-on piper deux dés de manière à ce que toutes les sommes soient équiprobables ?

Réponse à l'exercice de la semaine

Notons $p_1, p_2, ...p_6$ les probabilités de chaque face pour le premier dé et $q_1, q_2, ..., q_6$ les mêmes pour le deuxième dé.
Notons X la v.a. donnant la somme des 2 dés. On voudrait avoir $P(X=2) = P(X=3) = ... = P(X=12) = \dfrac{1}{11}$.
On a alors forcément
$p_1 q_1 = P(X=2) = P(X=12) = p_6 q_6 = \dfrac{1}{11}$, ce qui imlplique que $p_1,\ q_1,\ p_6$ et q_6 sont > 0.
$P(X=7) = p_1 q_6 + p_6 q_1 + p_2 q_5 + ...$
Or
$p_1 q_6 + p_6 q_1 = p_1 q_1 \frac{q_6}{q_1} + p_6 q_6 \frac{q_1}{q_6} = \frac{1}{11}(\frac{q_6}{q_1} + \frac{q_1}{q_6}) = \frac{1}{11}(x + \frac{1}{x}) > \frac{1}{11}$
On aurait donc $P(X=7) > \frac{1}{11}$ ce qui est absurde.

Densité

Une variable aléatoire continue X, peut être définie par la donnée de sa densité f_X, qui doit vérifier :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) \geq 0.$
- f_X possède un nombre fini de discontinuités dans chaque intervalle borné de $\mathbb{R}$.
- f_X est intégrable et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

Fonction de répartition

Une variable aléatoire continue X, peut également être définie par la donnée de sa fonction de répartition F_X, qui doit vérifier :

- $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$.
- F_X est croissante.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- F_X est continue partout et dérivable presque partout (dans tous les cas rencontrés).

Relation entre f_X et F_X

Pour une variable aléatoire continue X, de densité f_X et de fonction de répartition F_X, on a toujours :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$
- Partout où F_X est dérivable, on a $F'_X(x) = f_X(x)$.

Support

Définition

Le support d'une variable aléatoire X, est défini par :

- $D_X = \{x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) > 0\}$ dans le cas discret.
- $C_X = \{x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) > 0\}$ dans le cas continu.

Exemples

- Pour Bernouilli, $D_X = \{0, 1\}$.
- Pour Poisson, $D_X = \mathbb{N}$.
- Pour la loi exponentielle, $C_X = [0, +\infty[$.
- Pour la loi normale, $C_X = \mathbb{R}$.

Transformation de v.a.

Définition

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

On a donc : $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ ou encore : $\Omega \xrightarrow{\varphi(X)} \mathbb{R}$.
On peut donc poser : $Y = \varphi(X)$

- Y définit une nouvelle variable aléatoire si :
  $\forall b \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{-1}(]-\infty, b]) = \{x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \leq b\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- Si S_X est le support de X, celui de Y est $S_Y = \varphi(S_X)$.

On va se limiter aux cas où X et Y sont toutes deux discrètes ou toutes deux continues et où φ est strictement monotone.

Loi de probabilité de transformée

Cas discret

Soit X une variable aléatoire discrète et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application (transformation).
On pose : $Y = \varphi(X)$

- Le support de Y est $D_Y = \varphi(D_X)$.
- La loi de probabilités de Y est donnée par :
  $P_Y(\{y\}) = P(Y = y) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(\{y\})} P(X = x)$ si $y \in D_Y$
  et $P_Y(\{y\}) = P(Y = y) = 0$ sinon.

Loi de probabilité de transformée

Cas continu

Soit X une variable aléatoire continue et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application (transformation) strictement monotone.
On suppose que : $Y = \varphi(X)$ est une v.a. continue, i.e. $C_Y = \varphi(C_X)$ intervalle de $\mathbb{R}$.
On note ψ sa réciproque ($\psi = \varphi^{-1}$) que l'on suppose dérivable.

- La densité de probabilité de Y est donneé par :
  $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)| \quad$ si $y \in C_Y$
  $f_Y(y) = 0 \quad$ sinon.

Exemple

On dit que Y suit la loi log-normale de moyenne μ et de variance σ^2 si :
$Y = exp(X)$ avec $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
On note $Y \sim \mathcal{LOGN}(\mu, \sigma^2)$.
$\varphi(x) = e^x$ strictement croissante et $\psi(y) = \ln(y)$.
Le support de Y est $C_Y = \varphi(C_X) = \exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.
$\forall y \in D_Y, \quad f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)| = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} |\frac{1}{y}|$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Espérance de transformée

Si $Y = \varphi(X)$ est la transformée d'une v. a. X, son espérance est donnée par :

- $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in D_X} \varphi(x) P(X = x)$ dans le cas discret.
- $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_x(x) dx$ dans le cas continu.

Exercice de la semaine

Déterminer les caractériqtiques de la variable aléatoire : $Y = \varphi(X)$ où $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $\varphi(x) = e^x$.
Il faut préciser : le support, la densité de probabilité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de Y.

Solution de l'exercice de la semaine

$Y = \varphi(X)$ où $\quad X \sim \mathcal{U}([0,1]) \quad$ et
$\varphi(x) = e^x, \quad \psi(x) = \varphi^{-1}(x) = \ln(x)$.
Support de
$X = C_X = [0,1] \Longrightarrow C_Y = \varphi(C_X) = exp([0,1]) = [1, e]$.
Densité de probabilité :
$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)| = 1 \times \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$ si $y \in [1, e]$ et $= 0$ sinon.
Fonction de répartition : $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y)$

$$=\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \ln(y)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 1 \\ \ln(y) & \text{si} \quad y \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad y > 1 \end{cases}$$

Solution de l'exercice de la semaine

Espérance :

$$E(Y) = E(e^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f_x(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Variance de :

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x)^2 f_x(x)dx = \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

Donc

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e - 1)^2 = \frac{-e^2+4e-3}{2}.$$

Principe général

Théorème principal

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X, alors la v.a. $Y = F_X \circ X$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, c'est à dire $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Conséquence

Si $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$ et que l'on connait la réciproque F_X^{-1} de la fonction de répartition, alors $F_X^{-1} \circ Y$ suit la même loi que X.

Procédé

On a toujours un générateur de nombres pseudo-aléatoire qui peut simuler $\mathcal{U}(0,1)$: *alea, rand, random, randomize,...etc*

Concrétement

- On génère un nombre aléatoire u entre 0 et 1, réalisation de $\mathcal{U}(0,1)$.
- On lui applique $F_X^{-1} \implies x = F_X^{-1}(u)$ une réalisation de X.

En fait, on génère un grand nombre N de réalisations de X dont on calcule la moyenne et la variance à comparer aux valeurs exactes de $E(X)$ et $Var(X)$.

Problème

Lorsque F_X^{-1} n'est pas accessible,

- F_X non strictement croissante, fonction fractile $F_X^{-1}(u) = Inf\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq u\}$.
- F_X n'a pas d'expression analytique et encore moins F_X^{-1}.

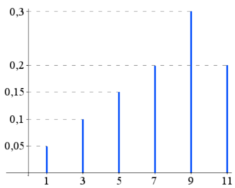
Exemples

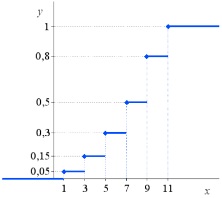
Exponentielle : Pour $X \sim \mathcal{E}xp(\theta)$ on sait que $F_X(x) = 1 - e^{-\theta x}$
Donc $F_X^{-1}(y) = -\dfrac{\ln(1-y)}{\theta}$.
On génère un nombre aléatoire $u \in]0,1[$, puis on calcule
$x = 1 - e^{-\theta u}$
Même technique pour :

- la loi de Cauchy, de densité $\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$
- la loi de Laplace de densité $e^{-\frac{|x|}{2}}$
- la loi de Pareto de densité $\frac{a}{x^{a+1}}$ sur $[1, +\infty[$.

Exemples

Si X est discrète à valeurs x_i avec probabilités p_i,





On génère un nombre $u \in]0,1[$ et on le compare à $\sum_{i=1}^{k} p_i$.

Si $\sum_{i=1}^{k-1} p_i \leq y < \sum_{i=1}^{k} p_i$, on prend $x = x_k$.

Même technique pour Bernouilli, binomiale, Poisson...

Exemples

Pour simuler $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on utilise le T.C.L.
On génère n nombres aléatoires $y_1, ..., y_n$.
On calcule $x = \dfrac{\sum y_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$
En général, on prend $n = 12$ ce qui donne $x = \sum y_i - 6$.
Pour $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on utilise la transformation affine : $x' = \sigma x + \mu$.