E.I.S.T.I. – Département Mathématiques
1ère Année Ingénieurs – Génie informatique
T.D. PROBABILITES

Mesure de probabilité - Combinatoire

ESPACE ECHANTILLON ET EVENEMENTS

Exercice 1

1) On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé et on observe les faces supérieures présentées après le lancer. En désignant les faces de la pièce par P (pile) et F (face) et celles du dé par 1, 2, ..., 6, déterminer l'espace échantillon associé à cette expérience.
2) Même question que précédemment pour l'expérience : On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne 6 pour la troisième fois et on observe le nombre de lancers nécessaires pour atteindre ce but.
3) Même question que précédemment pour l'expérience : Pendant une période de temps donnée, on compte le nombre d'automobilistes traversant le poste de péage d'un pont.
4) Même question que précédemment pour l'expérience : On observe le temps d'attente d'un automobiliste à un feu rouge.

Exercice 2

On lance simultanément deux dés et on observe le nombre de points sur la face supérieure de chaque dé. Représenter les événements suivants par un sous-ensemble de l'espace échantillon.

1) Le nombre de points sur chaque face est supérieur ou égal à 3.
2) Sur chaque face, il y a un nombre pair de points.

Exercice 3

En utilisant les opérations de réunion, d'intersection et de complémentaire, représenter les événements suivants.

1) Au moins un des événements A, B se réalise.
2) Les événements A, B ne se réalisent pas.
3) Exactement un des événements A, B se réalise.
4) Aucun des événements A, B ne se réalise.
5) Au moins un des événements A, B, C se réalise.
6) Au moins deux des événements A, B, C se réalisent.
7) Exactement un des événements A, B, C ne se réalise pas.
8) Exactement un des événements A, B, C se réalise.
9) A ne se réalise pas mais au moins un des événements B, C se réalise.
10) Les événements A, B, C se réalisent.

Exercice 4

Pour un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tel que

$$P[A]=0{,}3 \qquad P[B]=0{,}2 \qquad P[A\cap B]=0{,}1$$

déterminer les probabilités des événements suivants.

1) Au moins un des événements A, B se réalise.
2) Aucun des événements A, B ne se réalise.

3) A ne se réalise pas mais B se réalise.
4) Exactement un des événements A, B se réalise.

Exercice 5

Soit un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tel que

$$P[A]=\frac{1}{2} \qquad P[B]=P[C]=\frac{1}{6}$$

où A, B et C sont deux à deux incompatibles. Evaluer les probabilités suivantes.

1) $P[\overline{A}\cap\overline{B}]$ 2) $P[\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}]$
3) $P[\overline{A}\cap\overline{B}\cap C]$ 4) $P[A\backslash B]$
5) La probabilité qu'exactement un des événements A, B, C se réalise.

Exercice 6

Pour un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tel que

$$P[A]=0{,}5 \qquad P[B]=0{,}1 \qquad P[C]=0{,}3$$

déterminer la valeur exacte ou un encadrement des probabilités des événements suivants.

1) $P[\overline{B}]$ 2) $P[B\cup C]$ 3) $P[\overline{A}\cup\overline{B}]$
4) $P[B\cap C]+P[\overline{B}\cap C]$ 5) $P[A\cap\overline{B}]$

MESURE DE PROBABILITE

Exercice 7

On s'intéresse au nombre de clients passants à une station service durant une période de temps indéterminée. Connaissant la probabilité d'un événement élémentaire,

$$\forall\omega\in\Omega,\ P[\{\omega\}]=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!},$$

vérifier si on a bien une mesure de probabilité et calculer la probabilité de l'événement A={au plus un client}.

Exercice 8

On admet que la probabilité qu'une famille ait $k\geq 1$ enfants est αp^k, où $p\in]0,1[$.

1) Déterminer la constante α.
2) Calculer la probabilité d'avoir plus de 3 enfants.

Exercice 9

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé continu avec $\Omega=\mathbb{R}$ et de fonction de densité

$$\forall x\in\Omega,\ f(x)=\begin{cases} c(4x-2x^2) & 0<x<2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la constante c.
2. Calculer $P(]1,+\infty[)$.

MODELE UNIFORME

Exercice 10

Les trois mousquetaires (donc 4 personnes) ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. Calculer les probabilités pour

a) les deux bottes soient les siennes ?
b) les deux bottes forment une paire ?

c) les deux bottes soient deux pieds droits ?
d) les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes ?

Exercice 11

On veut photographier un groupe de 5 personnes. De combien de façons distinctes peut-on les placer les unes à côté des autres ?

Exercice 12

On lance un dé quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre chiffres différents ?

Exercice 13

Une équipe de rugby est composée de 15 joueurs. Les entraîneurs de la section paloise (du stade français) disposent d'un effectif de 30 joueurs.

1) En choisissant les joueurs au hasard, entre combien d'équipes les entraîneurs devront-ils choisir ?
2) La sélection faite, 4 joueurs tombent malades. Quelle est la probabilité que les entraîneurs soient conduits à modifier leur équipe ?

Exercice 14

Les 135 élèves d'une promotion sont convoqués à un examen dans un amphi dont les places sont numérotées de 1 à 300. L'administration attribue une place au hasard à chaque étudiant.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2) Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne soit placé au-delà de la place 200 ?
3) Pour éviter les tricheries, on décide de les placer sur les numéros pairs en intercalant une autre section sur les places impaires. Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne soit placé au-delà de la place 280 ?

Exercice 15

Dix livres sont sur un rayon. On les enlève puis on les remet au hasard.

1) Quelle est la probabilité pour que le $i^{ème}$ livre retrouve sa place ?
2) Quelle est la probabilité pour que tous les livres retrouvent leurs places ?

Exercice 16

Une urne contient 20 boules dont 6 sont vertes et 14 blanches. On tire au hasard 4 boules.

1) Les tirages se font avec remise et successivement.
    a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
    b) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre une boule verte puis trois boules blanches ?
    c) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte et trois boules blanches dans n'importe quel ordre ?
2) Mêmes questions dans le cas où les tirages se font sans remise.
3) Mêmes questions dans le cas où les tirages se font simultanément.