EISTI, 2015-2016
ING1-GI : Probabilités

TD 1 : Probabilité sur un espace fini

Exercice 1

Soit Ω un ensemble non vide. Soient A, B deux sous-ensembles (non vides et non identiques) de Ω.

a. Décrire la tribu engendée par A.
b. Décrire la tribu engendrée par A et B.

Exercice 2

Montrer que toute probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie la propriété suivante :

1. $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
2. $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Exercice 3

En utilisant les opérations de réunion, d'intersection et de complémentaire, représenter les événements suivants :

1. au moins un des événements A, B se réalise.
2. les événements A, B se réalisent.
3. exactement un des événements A, B se réalise.
4. aucun des événements A, B ne se réalise pas.
5. au moins un des événements A, B, C se réalise.
6. au moins deux des événements A, B, C se réalisent.
7. exactement un des événements A, B, C ne se réalise pas.
8. exactement un des éféments A, B, C se réalise.
9. aucun des événements A, B, C ne se réalise pas.
10. A ne se réalise pas mais au moins un des événements B, C se réalise.
11. Les événements A, B, C se réalisent.

Exercice 4

On lance deux dés et on observe le nombre de points sur la face supérieure de chaque dé. Représenter les événements suivants par les sous-ensembles de l'espace échantillon.

i. Le nombre de points sur chaque face est supérieur à 3.
ii. Le nombre total de points est 8.
iii. Le nombre total de points est supérieur à 9.

Exercice 5

Pour un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, si $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.2$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1. Au moins un des événements A, B se réalise.
2. Aucun des événements A, B ne se réalise pas.
3. A ne se réalise pas mais B se réalise.
4. Exactement un des événements A, B se réalise.

Exercice 6. Soit un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ tel que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6},$$

où A, B et C sont deux à deux incompatibles. Evaluer les probabilités suivantes.

$$1)\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}),\quad 2)\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}),\quad 3)\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C),\quad \mathbb{P}(A\setminus B).$$

5) La probabilité qu'exactement un des événements A, B, C se réalise.

Exercice 7. Pour un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ tel que

$$\mathbb{P}(A) = 0,5 \quad \mathbb{P}(B) = 0,1 \quad \mathbb{P}(C) = 0,3.$$

déterminer la valeur exacte ou un encadrement des probabilités des événements suivants.

$$1)\mathbb{P}(\overline{B})\quad 2)\mathbb{P}(B\cup C)\quad 3)\mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B})\quad 4)\mathbb{P}(B\cap C)+P(\overline{B}\cap C)\quad 5)\mathbb{P}(A\cap\overline{B})$$

Exercice 8

On s'intéresse au nombre de clients passants à une station service durant une période de temps indéterminée. Connaissant la probabilité d'un événement élémentaire,

$$\forall\omega\in\Omega,\quad \mathbb{P}(\{\omega\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\omega}}{\omega!},$$

vérifier si on a bien une mesure de probabilité et calculer la probabilité de l'événement A={au plus un client}.

Exercice 9. On admet que la probabilité qu'une famille ait $k \geq 1$ enfants est αp^k, où $p \in]0,1[$.

1) Déterminer la constante α.

2) Calculer la probabilité d'avoir plus de 3 enfants.

Exercice 10. Soit $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé continu avec $\Omega = \mathbb{R}$ et de fonction de densité

$$\forall x\in\Omega,\quad f(x) = \begin{cases} c(4x-2x^2) & 0 < x > 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Déterminer la constante c.

2) Calculer $\mathbb{P}(]1, +\infty[[)$.

Exercice 11. Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si à minuit chaque personne fait la bise à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ?

Exercice 12. On veut photographier un groupe de 5 personnes. De combien de façons distinctes peut-on les placer les unes à côté des autres ?

Exercice 13. On choisit au hasard quatre chiffres pour former un code secret. Quelle est la probabilité d'obtenir un code avec quatre chiffres différents ?

Exercice 14. Une équipe de rugby est composée de 15 joueurs. Les entraîneurs de la section paloise (du stade français) disposent d'un effectif de 30 joueurs.

1) En choisissant les joueurs au hasard, entre combien d'équipes les entraîneurs devront-ils choisir ?

2) La sélection faite, 4 joueurs tombent malades. Quelle est la probabilité que les entraîneurs soient conduits à modifier leur équipe ?

Exercice 15. Les 135 élèves d'une promotion sont convoqués à un examen dans un amphi dont les places sont numérotées de 1 à 300. L'administration attribue une place au hasard à chaque étudiant.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?

2) Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne soit placé au-delà de la place 200 ?

3) Pour éviter les tricheries, on décide de les placer sur les numéros pairs en intercalant une autre section sur les places impaires. Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne soit placé au-delà de la place 280 ?

Exercice 16. Une main au poker est constituée de 5 cartes d'un jeu de 52 (13 cartes de chaque couleur).

1) Quelle est la probabilité d'avoir une couleur (5 cartes de la même couleur)?

2) Quelle est la probabilité d'avoir un flush royal (as, roi, dame, valet, dix de la même couleur) ?

3) Quelle est la probabilité d'avoir un full (3 cartes d'une même valeur et une paire d'une autre valeur) ?

Exercice 17

Une urne contient n boules blanches ($n > 4$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité p_n que l'on ait tiré exactement 5 boules noires.
2. Pour tout $n \geq 5$ exprimer p_{n+1}/p_n en une fraction rationnelle.
3. En déduire les variations de la suite $(p_n)_{n\geq 5}$ et la valeur de n pour laquelle p_n est maximale.

Exercice 18

Dénombrer les mots binaires, écrits uniquement avec des 0 et des 1,

1. de longueur n où $n \in \mathbb{N}^*$,
2. comportant p fois 0 et q fois 1, où p et q sont deux entiers naturels de somme supérieure ou égale à 1.

Exercice 19. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une avec remise. Quelle est la probabilité pour que, sur m tirages, le plus grand des numéros tirés soit k ?

Exercice 20 (Exercice récapitulatif) Une urne contient 20 boules dont 6 sont vertes et 14 blanches. On tire au hasard 4 boules.

1) Les tirages se font avec remise et successivement.

a) Quel est le nombre de tirages possibles ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre une boule verte puis trois boules blanches ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte et trois boules blanches dans n'importe quel ordre ?

2) Mêmes questions dans le cas où les tirages se font sans remise.

3) Mêmes questions dans le cas où les tirages se font simultanément.