Feuille d'exercices

Espaces Probabilisés

Définitions (Vocabulaire des Probabilités)

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire.

• *Si Ω est un univers associé à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, alors :*

▶ *Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.*

▶ *L'ensemble $\mathcal{A}$ est appelé tribu des événements.*

▶ *Les éléments de $\mathcal{A}$ s'appellent les événements.*

▶ *Les singletons de Ω (lorsqu'ils sont dans $\mathcal{A}$) s'appellent les événements élémentaires.*

• *Si P est une mesure de probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors :*

▶ *Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.*

Exercice 1 - Tribu

Soit Ω un ensemble. Pour chaque cas, donner des conditions sur Ω pour que $\mathcal{A}$ soit une tribu sur Ω .

1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.
2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
3) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega\}, \Omega\}$ où $\omega \in \Omega$.
4) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega\}, \{\omega\}^c, \Omega\}$ où $\omega \in \Omega$.
5) La classe des parties finies de Ω.
6) La classe des parties dénombrables (sous-entendu finies ou infinies) de Ω.

Exercice 2 - Tribu engendrée

1) Donner la tribu de $\Omega = [0, 2]$ engendrée par $\{[0, 1[, [1, 2]\}$.
2) Donner la tribu de $\Omega = [0, 2]$ engendrée par $\{[0, 1[, \{1\},]1, 2]\}$.

Exercice 3 - Opérations finies sur des événements

Soit A, B et C trois événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Exprimer en fonction de A, B et C et des opérations ensemblistes (réunion, intersection et complémentaire) les événements ci-après :

1) A seul (parmi les 3 événements) se produit.
2) A et C se produisent, mais non B.
3) Les trois événements se produisent.
4) L'un au moins des 3 événements se produit.
5) Deux événements au moins se produisent.
6) Un événement au plus se produit.
7) Aucun des trois événements ne se produit.

8) Deux événements exactement se produisent.

9) Pas plus de deux événements ne se produisent.

Note : Si Ω est dénombrable, une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est complètement définie par la probabilité des événements élémentaires.

Exercice 4 - Probabilité et univers fini

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un univers. Combien peut-on définir de probabilités P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, pour chacun des cas suivants ? :

1) $P(\{a, b\}) = \dfrac{1}{4}$.

2) $P(\{a, b\}) = P(\{b, c\}) = \dfrac{1}{4}$.

3) $P(\{a, b\}) = P(\{b, c\}) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 5 - Probabilité et univers infini dénombrable

1. Soit P une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que

$$P(\{n\}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs et de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant

$$P(\{n, n+1, \ldots\}) = \lambda a_n$$

3. Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 - Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$$

Exercice 7 - On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

- U_1 contient 7 boules noires et 3 boules blanches,
- U_2 contient 4 boules noires et 4 boules blanches,
- U_3 contient 1 boule noire et 4 boules blanches.

On choisit une urne au hasard et l'on tire une boule.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ?

2. Sachant que cette boule est noire, qu'elle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

Exercice 8 - On considère deux urnes U_1 et U_2.

- U_1 contient 4 boules rouges et 2 boules blanches,
- U_2 contient 2 boules rouges et 4 boules blanches.

On choisit une urne au hasard et l'on y procède à des tirages successifs, avec remise.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage.

2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au troisième tirage sachant qu'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers tirages.

3. Calculer la probabilité p_n d'avoir effectué les tirage dans l'urne U_1, sachant qu'on a obtenu une boule rouge aux n premiers tirages.

Exercice 9 - Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de n événements mutuellement indépendants, montrer que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n))$$

Application : Une personne est soumise à n expériences indépendantes les unes des autres. A chaque expérience, elle a une probabilité p $(0 < p < 1)$ d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 10 - Indépendance

On jette simultanément deux dés non pipés, un noir et un blanc. On définit les événements :

- A = «le chiffre du dé noir est pair» ;
- B = «le chiffre du dé blanc est impair» ;
- C = «les deux chiffres ont même parité».

1. Proposer un espace probabilisé pour cette expérience aléatoire.

2. Étudier l'indépendance deux à deux des événements A, B, C.

3. Montrer que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 11 - Opérations infinies dénombrables sur des événements

On effectue une suite infinie de tirages du loto. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note l'événement :

$$A_i = \text{« sortie de la boule n° 13 au } i\text{-ième tirage »}$$

▶ Un tirage du loto est un tirage successif et sans remise de 6 numéros (un à un) dans

$$U = [\![1\ ,\ 49]\!]$$

1. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes sur les A_i l'évènement :

$$A = \text{« le n° 13 sort pour la première fois au cinquième tirage »}$$

2. Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :

$$E_1 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i \quad ; \quad E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\right) \quad ; \quad E_3 = \bigcup_{i>4} A_i \quad ; \quad E_4 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{2i}^c$$

3. On pose $C_n = \displaystyle\bigcap_{i\geq n} A_i$.

a) Vérifier que la suite $(C_n)_{n\geq 0}$ est croissante (i.e. : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \subset C_{n+1}$).

b) Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement :

$$C = \bigcup_{n\geq 1} C_n$$

4. Écrire à l'aide des A_i les événements :

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{B}_n & = & \text{« le n° 13 sort au moins une fois au delà du } n\text{-ième tirage »} \\ \mathrm{B} & = & \text{« sur l'ensemble des tirages, le n° 13 sort une infinité de fois »} \end{array}$$

Exercice 12 - Indépendance - incompatibilité - suite croissante - suite décroissante

On considère une urne qui contient deux boules vertes et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs avec remise de la boule tirée.

Note : L'univers canonique est $\Omega = \{V, R\}^{\mathbb{N}^*}$. Ω n'est pas dénombrable !! On admettra (délicat à construire) l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ régissant cette expérience aléatoire.

On définit l'événement :

- E = «on obtient au moins une boule rouge».

On souhaite calculer $P(E)$ par trois méthodes différentes. Pour cela, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les événements suivants :

- A_n = «on obtient la première boule rouge au n-ième tirage» ;
- B_n = «on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages» ;
- C_n = «on obtient n boules vertes au cours des n premiers tirages».

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$, $P(C_n)$ et $P(B_n)$.

2. Exprimer E à l'aide des événements A_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.

3. Exprimer E à l'aide des événements B_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E)$.

4. Exprimer E^c à l'aide des événements C_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire $P(E^c)$ et $P(E)$.

5. Que dire de l'événement E ? Interpréter ce résultat.

Exercice 13 - Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée, on la remet dans l'urne et on ajoute en plus une boule noire.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

- E_n = « on obtient la première boule blanche au n-ième tirage » ;
- F_n = « on obtient la première boule noire au n-ième tirage ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $P(E_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

b) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

c) En déduire que l'on obtient presque sûrement au moins une boule blanche (au cours de la suite infinie de tirages).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $P(F_n) = \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!}$.

b) En déduire que l'on obtient presque sûrement au moins une boule noire.

Exercice 14 - Deux cours ont lieux simultanément dans deux amphithéâtres contigus. Les deux amphithéâtres, appelés A et B, contiennent respectivement 90 % et 50 % de jeunes filles et dans B il y a quatre fois plus d'étudiants (garçons ou filles) que dans A. Les deux amphithéâtres se vidant dans le même couloir, calculer la probabilité qu'une jeune fille choisie au hasard sorte de A.

Exercice 15 - Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sachant que l'on a :

$$P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$$

Quel est le maximum possible de $P(A \cap B)$ et quel en est le minimum.

Exercice 16 - Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P_B = P$.