Espaces Probabilisés

Khalid El Amine I.
Department of Mathematics

★★★

Dans tout ce chapitre, Ω est un ensemble non vide

1 Tribu

Définition 1.1 (Ensemble dénombrable)
Un ensemble E est dit dénombrable lorsqu'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exemples :

- Tout ensemble fini est dénombrable.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ ne sont pas dénombrables.

Définition 1.2 (Tribu)
Soit Ω un ensemble. On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur Ω, toute famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω vérifiant :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, i.e. :*
$$\text{si } A \in \mathcal{A}, \text{ alors } A^c \in \mathcal{A}$$
3. *$\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, i.e. :*
$$\text{si } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite d'éléments de } \mathcal{A}, \text{ alors } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

Proposition 1.3 *Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$. On a :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable, i.e. :*
$$\text{si } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \text{ alors } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$$
3. *$\mathcal{A}$ est stable par réunions et intersections finies, i.e. :*
$$\text{si } (B_n)_{0\le n\le N} \in \mathcal{A}^{N+1}, \text{ alors } \bigcup_{n=0}^{N} B_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n=0}^{N} B_n \in \mathcal{A}$$

Preuve :

1.1 Tribu engendrée

I est un ensemble d'indices quelconque (fini, infini dénombrable ou non dénombrable).

Proposition 1.4 *Soit Ω un ensemble et $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus de Ω. Alors*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

est une tribu sur Ω.

Preuve : (Admis).

Proposition et définition 1.5 *Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Il existe une plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$. Elle s'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ et est notée $\sigma(\mathcal{C})$. En notant $I = \{\mathcal{T} : \mathcal{T}$ est une tribu sur Ω et $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}\}$, on a :*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{T}\in I} \mathcal{T}$$

Preuve : (Admis).

Exemples :

1. Si $A \subset \Omega$ alors la tribu engendrée par A est $\sigma(\{A\}) =$
2. Si $\Omega = [0, 1]$ et $A = \{0\}$, alors la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{\{0\}\}$ est $\sigma(\mathcal{C}) =$

1.2 Tribu engendrée par une partition

Définition 1.6 (Partition)
Soient Ω un ensemble, $I \subset \mathbb{N}$ et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Ω. On dit que cette famille forme une partition de Ω si :

1. $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall\, i, j \in I$ *avec* $i \neq j$
2. $\Omega = \bigcup_{i\in I} E_i$

Exemple :

- $\forall A \subset \Omega$, la famille $\{A, A^c\}$ est une partition de Ω.
- $(\{i\})_{i\geq 1}$ est une partition de $\mathbb{N}^*$.

Proposition 1.7 (Tribu engendrée par une partition)
Soient Ω un ensemble, $I \subset \mathbb{N}$ et $(E_i)_{i\in I}$ une partition de Ω. La tribu engendrée par les E_i est décrite par

$$\sigma((E_i)_{i\in I}) = \left\{ \bigcup_{j\in J} E_j \ ,\ J \subset I \right\}$$

avec par convention $\bigcup_{j\in\emptyset} E_j = \emptyset$.

Cette tribu contient "autant" d'ensembles qu'il y a de parties de I.

Preuve : (Admis)

1.3 Tribu de Borel

Définition 1.8 (Tribu borélienne)
On appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ la tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et ses éléments sont appelés boréliens.

Proposition 1.9 *La tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par tout type d'intervalle, en particulier par les intervalles de la forme $]a, b]$ ou de la forme $]-\infty, b]$:*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{]a, b] \ : \ a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b\}) \\ &= \sigma(\{]-\infty, b] \ : \ b \in \mathbb{R}\})\end{aligned}$$

Preuve : (admis)

Remarque : La tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ contient :

- Tous les intervalles et tous les singletons de $\mathbb{R}$.
- Tous les ensembles définies par des intersections finies ou infinies dénombrables des intervalles ou de leur complémentaires.
- Tous les ensembles définies par des réunions finies ou infinies dénombrables des intervalles ou de leur complémentaires.

2 Espace probabilisable

2.1 Univers

Définition 2.1 (Expérience aléatoire)
Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue est soumise au hasard, elle est notée $\mathcal{E}$.

Définition 2.2 (Eventualité)
Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire. On appelle éventualité, un résultat possible de $\mathcal{E}$.

Définition 2.3 (Univers)
Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire. Un ensemble contenant tous les résultats possibles (éventualités) de cette expérience est appelé univers (ou ensemble fondamental). On le note Ω. Un élément de Ω est noté ω.

Exemple 1 :
$\mathcal{E}$ = "jet d'une pièce de monnaie"
$\Omega = \{P, F\}$,
$\omega = P$ est un résultat possible.

Exemple 2 :
$\mathcal{E}$ = "lancer d'un dé régulier"
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$\omega = 2$ est un résultat possible.

Exemple 3 :
$\mathcal{E}$ = "jet d'une pièce de monnaie 2 fois de suite"
$\Omega = \{(P, P); (P, F); (F, P); (F, F)\}$,
$\omega = (P, P)$ est un résultat possible.

Exemple 4 :
$\mathcal{E}$ = "jet simultané de deux pièces de monnaie non discernables"
$\Omega = \{(P, P); (P, F); (F, F)\}$. Dans cet exemple il n'y a pas d'ordre.
$\omega = (P, F)$ est un résultat possible.

Exemple 5 :
$\mathcal{E}$ = "compte du nombre d'appels arrivant dans un centre téléphonique pendant une journée"
$\Omega = \mathbb{N}$,
$\omega = 1$ est un résultat possible.

Exemple 6 :
$\mathcal{E}$ = "mesure de la durée de vie d'une bactérie"
$\Omega = [0, \infty[$. Quelque soit l'unité de mesure, on suppose que la précision est infinie.
$\omega = 0$ est un résultat possible.

2.2 Espace Probabilisable

Définition 2.4 *Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire. Si Ω est un univers associé à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, alors : le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.*

2.3 Evénement

Définition 2.5 *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.*

- *L'ensemble $\mathcal{A}$ est appelé tribu des événements.*
- *Les éléments de $\mathcal{A}$ s'appellent les événements. Un événement est souvent défini par une proposition (expression logique).*

▶ *Les singletons de Ω (lorsqu'ils sont dans $\mathcal{A}$) s'appellent les événements élémentaires.*

▶ *L'événement Ω est appelé événement certain.*

▶ *L'événement $\emptyset$ est appelé événement impossible.*

Exemples :

1. L'événement «le résultat du lancer de dé est pair» est représenté par l'ensemble : $A = \{2, 4, 6\}$.
2. L'événement «le nombre d'appels reçu dans la journée est inférieur à 3» est représenté par l'ensemble : $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
3. L'événement «la durée de vie d'une bactérie est supérieure à 1 unité» est représenté par l'ensemble : $A = [1, +\infty[$.

Remarque : Tout ensemble A peut s'écrire sous la forme :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

En particulier, si les singletons sont des événements, alors tout événement A peut s'écrire sous forme d'une réunion d'événements élémentaires.

2.4 Opérations sur les événements

Sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, les opérations ensemblistes permettent de définir d'autres événements à partir de deux événements, ou de plusieurs.

Soient A et B deux événements :

- A^c est l'événement contraire de A (on note aussi $\overline{A}$). $A^c = \Omega \backslash A$.
  A^c se réalise si et seulement si A ne se réalise pas.
- $A \cup B$ est l'événement «A ou B».
  $A \cup B$ se réalise lorsque au moins un des deux événements se réalise.
- $A \cap B$ est l'événement «A et B».
  $A \cap B$ se réalise lorsque les deux événements se réalisent.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements. Les ensembles

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

sont des événement puisque $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection dénombrables.

- $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ se réalise si et seulement si un au moins des événements A_n se réalise.
- $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ se réalise si et seulement si tous les événements A_n se réalisent.

2.5 Relations entre événements

- **Incompatibilité**
  A et B sont incompatibles si leur réalisation simultanée est impossible : $A \cap B = \emptyset$.
- **Implication**
  A implique B signifie que si A se réalise, alors B se réalise aussi : $A \subset B$

Définition 2.6 (Système complet d'événements)
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle système complet d'événements (SCE), toute partition dénombrable de Ω formée d'éléments de $\mathcal{A}$; c-a-d tout ensemble dénombrable d'événements, deux à deux incompatibles et dont l'union dénombrable est l'événement certain.

Remarques - Choix de la tribu :

▶ La définition générale d'une tribu $\mathcal{A}$ ne suppose pas que tous les singletons $\{\omega\}$ soient des éléments de $\mathcal{A}$. Donc un singleton $\{\omega\}$ n'est pas toujours un événement. Cependant, dans la plupart des exemples que nous étudierons, la tribu possédera les singletons.

▶ Quand l'univers Ω est infini, il n'est pas toujours facile d'expliciter le choix de la famille $\mathcal{A}$ d'événements. On devra parfois se contenter d'admettre qu'elle contient au moins les événements auxquels on s'intéresse vraiment.

- Si Ω est fini ou infini dénombrable, on prendra toujours (sauf dans des cas rares) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Si $\Omega = \mathbb{R}$ on prendra toujours $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Si Ω est infini non dénombrable ($\neq \mathbb{R}$), on prendra comme tribu, la tribu engendrée par les événements qu'on souhaite étudier.

3 Espace Probabilisé

Définition 3.1 (Probabilité)
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant :

1. $\forall A \in \mathcal{A},\ P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$ *(normalisation)*
3. $\forall\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$, *une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles, on a :*

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \qquad (P \text{ est } \sigma\text{-additive})$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Remarques :

▶ Une probabilité est une fonction permettant de « mesurer » la chance de réalisation d'un événement.

▶ Définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ c'est en quelque sorte attribuer une « masse » à chaque événement, avec par convention une masse totale égale à 1 pour l'événement certain Ω.

Proposition 3.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. *Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Si A_1 et A_2 sont incompatibles, alors*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

3. *Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{A}^n$. Si les A_i sont deux à deux incompatibles, alors :*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad (P \text{ est additive})$$

Preuve : (Admis).

Proposition 3.3 *Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On a :*

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. $P(B\backslash A) = P(B) - P(B \cap A)$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ *(P est croissante)*
4. $P(A) \in [0, 1]$

Preuve :

Proposition 3.4 (formule d'inclusion-exclusion ou formule de Poincaré)
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de n événements. on a :

1) *Dans le cas de deux événements :*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

2) *Dans le cas de trois événements :*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad -P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad +P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

3) *Dans le cas de n événements :*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Preuve :

Proposition 3.5 (Inégalité de Bonferroni)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

- *Si* $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est une suite de* n *événements, alors :*
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad \text{(}P\text{ est sous-additive)}$$
- *Si* $(A_n)_{n \geq 1}$ *est une suite d'événements, alors :*
$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \qquad \text{(}P\text{ est }\sigma\text{-sous-additive)}$$

Preuve : (Admis).

Proposition 3.6 (continuité monotone)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

- *Si* $(A_n)_{n \geq 0}$ *est une suite croissante d'événements, alors :*
$$P(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = P(\lim_n \uparrow A_n) = \lim_n \uparrow P(A_n)$$
- *Si* $(A_n)_{n \geq 0}$ *est une suite décroissante d'événements, alors :*
$$P(\bigcap_{n \geq 0} A_n) = P(\lim_n \downarrow A_n) = \lim_n \downarrow P(A_n)$$

Preuve : (Admis)

Corollaire 3.7 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n \geq 0}$ *une suite quelconque d'événements. On a :*
$$P(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \lim_n \uparrow P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k)$$
et
$$P(\bigcap_{n \geq 0} A_n) = \lim_n \downarrow P(\bigcap_{k=0}^{n} A_k)$$

Preuve : On utilise la continuité monotone.

3.1 Événement négligeable

Définition 3.8 (événement négligeable)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

- *Un événement* A *est dit négligeable (ou quasiment impossible), s'il est impossible presque sûrement, i.e. :*
$$P(A) = 0$$
- *Un événement* B *est dit quasiment certain, s'il est certain presque sûrement, i.e. :*
$$P(B) = 1$$

Proposition 3.9 .

- *Tout événement inclus dans un événement négligeable est négligeable.*
- *La réunion d'une famille dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.*

Preuve : (A faire)

3.2 Probabilité sur Ω fini

Lorsque Ω est fini, on prend très souvent $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Lemme 3.10 *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. Si P est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors*

$$\begin{cases} P(\{\omega_i\}) \geq 0 & \forall i \in [\![1, n]\!] \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = 1 \end{cases}$$

Preuve :

La réciproque est donnée par :

Théorème 3.11 *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. Si $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite de n réels tels que :*

$$\begin{cases} p_i \geq 0 & \forall i \in [\![1, n]\!] \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

alors il existe une unique probabilité P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que :

$$P(\{\omega_i\}) = p_i \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Cette probabilité est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$$

Preuve : (Admis)

Commentaire : Sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, une probabilité est complètement définie par la probabilité des événements élémentaires.

Exemple : Soit $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que

$$\forall i \in \Omega \quad P(\{i\}) = ai$$

2) Si $n = 6$, calculer la probabilité de l'événement $A = \{i \in \Omega \ : \ i \text{ est impair}\}$

Solution :

3.3 Probabilité uniforme sur Ω fini

Définition 3.12 *Soit Ω un univers fini. On dit que P est la* **probabilité uniforme** *sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si :*

$$\forall\ \omega, \omega' \in \Omega, \qquad P(\{\omega\}) = P(\{\omega'\})$$

On dit aussi qu'il y a **équiprobabilité** *des événements élémentaires.*

Proposition 3.13 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Si P est la probabilité uniforme, alors :*

$$\forall\ A \in \mathcal{A}, \qquad P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Preuve : En posant $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, la famille $(\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\})$ est un système complet d'événements. Puis, on utilise la règle d'additivité de la probabilité.

Exemple : On jette un dés à six faces. L'espace probabilisable associé à cette expérience est $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ où $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si le dé est équilibré, alors les six faces sont équiprobables.

La probabilité de l'événement A = «obtention d'un nombre pair» = $\{2,4,6\}$ est

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3.4 Probabilité sur Ω infini dénombrable

Lorsque Ω est infini dénombrable, on prend très souvent $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Lemme 3.14 *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\} = \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ un univers infini dénombrable. Si P est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, alors*

$$\begin{cases} P(\{\omega_i\}) \geq 0 & \forall i \in \mathbb{N}^* \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(\{\omega_i\}) = 1 \end{cases}$$

Preuve : Même démo que pour le cas d'un univers fini.

La réciproque est donnée par :

Théorème 3.15 *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\} = \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ un univers infini dénombrable. Si $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels tels que :*

$$\begin{cases} p_i \geq 0 & \forall i \in \mathbb{N}^* \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1 \end{cases}$$

alors il existe une unique probabilité P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que :

$$P(\{\omega_i\}) = p_i \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Cette probabilité est donnée par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$$

Preuve : (Admis)

Commentaire : Sur un espace probabilisable infini dénombrable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, une probabilité est complètement définie par la probabilité des événements élémentaires.

Exemple : Considérons l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ et une application P sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ vérifiant

$$P(\{n\}) = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer que P définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

2. Calculer la probabilité de l'événement $A = \{2n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

3. En déduire la probabilité de l'événement $B = \{2n+1 \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$.

Solution :

3.5 Probabilité uniforme sur Ω infini dénombrable

Attention : Il n'existe pas de probabilité uniforme sur un espace probabilisable infini dénombrable.

En effet :

3.6 Probabilité sur Ω non dénombrable

(Le cas général est hors programme, quelques cas seront traiter en TD)

4 Probabilité conditionnelle

4.1 Définition

Proposition et définition 4.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $B \in \mathcal{A}$ *tel que* $P(B) > 0$. *L'application* P_B *définie sur* $\mathcal{A}$ *par :*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ , \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ *; elle est appelée la probabilité conditionnelle sachant* B.

Preuve :

Remarque : Comme P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, elle possède toutes les propriétés d'une probabilité. En particulier :

$$P_B(A^c) = 1 - P_B(A)$$

Définition 4.2 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) > 0$. Soit $A \in \mathcal{A}$. La probabilité de A sachant B est définie par*

$$P(A \,|\, B) = P_B(A)$$

C'est la probabilité pour que l'événement A se produise sachant que l'événement B s'est produit.

Exemple : On lance une pièce de monnaie équilibrée 2 fois de suite. On a équiprobabilité. Supposons qu'on veuille calculer la probabilité d'avoir 2 piles et notons A cet événement. Avec $P = Pile$ et $F = Face$, on a :

$$\Omega = \{(P, P); (P, F); (F, P); (F, F)\}$$

et

$$A = \{(P, P)\}$$

L'espace probabilisé associé à cette expérience est $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ où P est la probabilité uniforme. Si on calcul cette probabilité en n'ayant le résultat d'aucun des lancers, on obtient

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Si on calcul cette probabilité après avoir pris connaissance du résultat du premier lancer on trouve :

$$P(A \,|\, B) = 0 \ \text{ si on avait obtenu face ; } B =$$

$$P(A \,|\, B) = \frac{1}{2} \ \text{ si on avait obtenu pile ; } B =$$

Attention : $(A \,|\, B)$ n'est pas un événement ! On utilise la notation $P(A \,|\, B)$ par simplicité, mais c'est $P_B(A)$ qui est correcte.

4.2 Formule des probabilités composées

Proposition 4.3 (Première formule des probabilités composées)
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$. On a :

1. $P(A \cap B) = P(A \,|\, B)P(B)$ *si* $P(B) \neq 0$
2. $P(A \cap B) = P(B \,|\, A)P(A)$ *si* $P(A) \neq 0$

Preuve : En appliquant la définition de la probabilité conditionnelle.

Théorème 4.4 (Deuxième formule des probabilités composées)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n événements $(n \geq 2)$ telle que

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$$

Alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \,|\, A_1)P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \,|\, A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Preuve : Par récurrence.

Exemple - Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules (une à une) selon le procédé suivant :

- si on tire une boule noire, on l'enlève ;
- si on tire une boule blanche, on l'enlève, et on met une boule noire à sa place dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ?

Solution : Nous n'allons pas expliciter l'espace probabilisé qui régit cette expérience, mais seulement calculer la probabilité demandée.
Notons B_i l'événement « la i-ème boule tirée est blanche ». La probabilité recherchée est :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)$$

Nous avons

$$P(B_1) = \frac{3}{10}$$

Si B_1 est réalisé, avant le 2-ième tirage, l'urne est constituée de 8 boules noires et 2 blanches. Ainsi :

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{2}{10}$$

Si B_1 et B_2 sont réalisés, avant le 3-ième tirage, l'urne est constituée de 9 boules noires et 1 blanche. On en déduit

$$P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{1}{10}$$

Finalement :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{6}{1000} = \frac{3}{500}$$

4.3 Formule des probabilités totales

Proposition 4.5 (Première formule des probabilités totales)
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{A}$. On a :

1. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$*
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$
2. *Si $P(B) \neq 0$ et $P(B^c) \neq 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$*
$$P(A) = P(B)P_B(A) + P(B^c)P_{B^c}(A)$$

Preuve : $\forall B \in \mathcal{A}$; $\{B, B^c\}$ est un SCE de Ω. Ainsi :

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, les événements $A \cap B$ et $A \cap B^c$ sont incompatibles, d'où :
$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (B \cup B^c)) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = P(A \cap B) + (A \cap B^c)$$
2. Si $P(B) \neq 0$ et $P(B^c) \neq 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$:
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(B)P_B(A) + P(B^c)P_{B^c}(A)$$

Théorème 4.6 (Deuxième formule des probabilités totales)
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(B_n)_{n\geq 0}$ un SCE (fini ou infinie dénombrable) de Ω. On a :

1. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$*
$$P(A) = \sum_{n\geq 0} P(A \cap B_n)$$
2. *Si $\forall n \geq 0$, $P(B_n) \neq 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$*
$$P(A) = \sum_{n\geq 0} P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Preuve : $(B_n)_{n\geq 0}$ est un SCE de Ω. On a donc :

1. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, les événements $A \cap B_n$ sont 2 à 2 incompatibles, d'où :

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{n\geq 0} B_n)) = P(\bigcup_{n\geq 0}(A \cap B_n)) = \sum_{n\geq 0} P(A \cap B_n)$$

2. Si $\forall n \geq 0$, $P(B_n) \neq 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$P(A) = \sum_{n\geq 0} P(A \cap B_n) = \sum_{n\geq 0} P(B_n) P_{B_n}(A)$$

Exemple - On considère trois urnes ; U_1, U_2 et U_3, chacune contenant 10 boules. La première contient une seule boule blanche, la deuxième contient 2 boules blanches et la troisième en contient 3. On choisit une urne au hasard et l'on tire une boule. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

On notera les événements :
B = «la boule tirée est blanche» et U_i = «la boule provient de l'urne U_i».

Solution - La famille d'événements $\{U_1, U_2, U_3\}$ est une partition de Ω. La formule des probabilités totales donne :

$$P(B) = P(U_1)P(B \mid U_1) + P(U_2)P(B \mid U_2) + P(U_3)P(B \mid U_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

4.4 Formules de Bayes

Proposition 4.7 (Première formule de Bayes)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour tous événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) P(B)}{P(A)}$$

Preuve : En éliminant $P(A \cap B)$ entre

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

on obtient

$$P(B \mid A) P(A) = P(A \mid B) P(B)$$

d'où le résultat.

Remarque :

► La formule de Bayes (prononcer Baïz) inverse le conditionnement. On l'utilise pour calculer $P(B \mid A)$ lorsqu'on connaît $P(A \mid B)$.

► La formule de Bayes s'appelle aussi formule de probabilité des causes. En pratique, on séen sert pour calculer la probabilité d'une cause sachant la conséqence.

Théorème 4.8 (Deuxième formule de Bayes)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ un SCE (fini ou infinie dénombrable) tel que pour tout $n \geq 0$ $P(B_n) \neq 0$. On a pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{\sum_{n\geq 0} P(A \mid B_n) P(B_n)} \quad , \quad \forall i \geq 0$$

Preuve : Nous avons $\sum_{n\geq 0} P(A \mid B_n)P(B_n) = P(A)$, en vertu de la formule des probabilités totales.
L'expression du théorème résulte ensuite de la première formule de Bayes.

Exercice - Une urne contient 100 dés dont 25 dés truqués tels que la probabilité d'apparition de 6 (en jetant un dé truqué) soit $\frac{1}{2}$. On prend un dé au hasard dans l'urne, on le jette, on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

Solution -

5 Indépendance

5.1 Indépendance de deux événements

Proposition 5.1 *Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(2) $P(A \mid B) = P(A)$

(3) $P(B \mid A) = P(B)$

Preuve : Il suffit de démontrer que (1) $\Leftrightarrow$ (2) et (1) $\Leftrightarrow$ (3).

- $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(B \mid A) = P(B)$

Définition 5.2 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$. Les événement A et B sont dit indépendants si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exemple : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Il y a équiprobabilité. Considérons les événements : $A =$ «tirer un as» et $B =$ «tirer un coeur».
Montrer que A et B sont indépendants.

Solution : On prend pour cette expérience l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où $\Omega = \{\text{des 32 cartes}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P est la probabilité uniforme.

$A \cap B$ est l'événement «tirer l'as de coeur» d'où $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$
et on a :
- 4 as dans un jeu de 32 cartes $\Rightarrow P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$;
- 8 coeurs dans le même jeu $\Rightarrow P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$;

$\Rightarrow P(A)P(B) = \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32} = P(A \cap B)$.

Conclusion : A et B sont indépendants.

Proposition 5.3 *Si A et B sont indépendants, il en est de même pour*

- *A et B^c*
- *A^c et B*
- *A^c et B^c*

Preuve :

5.2 Indépendance de n événements

Définition 5.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathcal{A}$, une famille d'événements.*

- *Indépendance deux à deux*
  $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont dits deux à deux indépendants si :*
  $$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall \quad 1 \leq i \neq j \leq n$$
- *Indépendance mutuelle*
  $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont dits mutuellement indépendants si :*
  $$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}) \quad \forall\, 2 \leq k \leq n \ \text{ et } \forall \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$$

Exemple : Soient A, B et C 3 événements. Ils sont mutuellement indépendants ssi :

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Remarque :

▶ Des événements peuvent être 2 à 2 indépendants sans être mutuellement indépendants.

▶ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si et seulement si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants, avec $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$.

5.3 Indépendance d'une suite infinie d'événements

Définition 5.5 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements. On dit que les événements de cette suite sont (mutuellement) indépendant, lorsque pour toute partie finie et non vide I de $\mathbb{N}$*
$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Remarque :

• L'indépendance entre événements est une notion délicate. En pratique, l'indépendance d'une suite d'événements n'est en général pas démontrable, elle est une conséquence du choix de la modélisation. Il y a deux points de vue :

1. **Indépendance probabiliste** : On se donne un modèle probabiliste (espace probabilisé) et on cherche à démontrer que deux événements (ou une suite finie d'événements) sont indépendants.
2. **Indépendance physique** :
   - Cas de deux événements : On construit un modèle probabiliste en supposant que l'on a indépendance physique entre deux événements A et B et on pose ensuite
     $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
   - Cas d'une suite d'événements : Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire composée d'une succession d'épreuves indépendantes $\mathcal{E}_i$; $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_i)_{i\geq 1}$. Si $\forall i \geq 1$ A_i est un événement associé à $\mathcal{E}_i$ alors les $(A_i)_{i\geq 1}$ sont indépendants. Par exemple $\mathcal{E} =$ «lancer plusieurs fois une pièce» ; et $A_i =$ «obtenir pile au i-ème lancer».

• Par construction du modèle, l'indépendance physique implique l'indépendance probabiliste. La réciproque est fausse.