

Projet EDP

-

Résolution de problème aux limites pour une équation parabolique Sujet 2

CARRIERE Amandine, LAFOSSE MARIN Sheryl,
MAZODIER Alice, SROUSSI Mathieu

23 janvier 2009

Table des matières

1	Etude analytique	3
1.1	Montrons que l'équation est parabolique	3
1.2	Changement d'inconnue	3
1.3	Nouvelles conditions aux limites et initiale pour v	4
1.4	Résolution du problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenue	5
1.5	Résolution	7
2	Résolution Numérique	7
2.1	Définissons une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$	7
2.2	On discrétise les conditions aux limites et les conditions initiales	8
2.3	On discrétise l'Equation à l'aide de la méthode de Cranck-Nicolson	8
2.4	Sous forme matricielle, les équations aux différences finies donnent :	9
3	Comparaison des résultats	10

1 Etude analytique

$$E = \begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x & \text{si } x \in]0, 1[; t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-0.5x} x(x-1) \\ u(0, t) = 0; u(1, t) = 0 \end{cases}$$

1.1 Montrons que l'équation est parabolique

L'équation générale pour deux variables sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}$ est :

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = F(x, y)$$

Ici, notre équation est $u_t = u_{xx} + u_x$ soit $u_{xx} + u_x - u_t = 0$.

Par identification, on obtient les coefficients suivants :

$$a_{11}(x, y) = 1; b_1(x, y) = 1; b_2(x, y) = -1$$

On calcule ensuite le déterminant Δ :

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$$

$$\Delta = 0^2 - 1 \cdot 0$$

$$\Delta = 0$$

Le déterminant est nul, l'équation est de type parabolique

1.2 Changement d'inconnue

Soit le changement d'inconnue : $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$

$$\begin{cases} u_x = \frac{\delta u}{\delta x}(x, t) = \alpha e^{\alpha x + \beta t} v(x, t) + e^{\alpha x + \beta t} v_x(x, t) = (\alpha v(x, t) + v_x(x, t))e^{\alpha x + \beta t} \\ u_{xx} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(x, t) = (\alpha^2 v(x, t) + 2\alpha v_x(x, t) + v_{xx}(x, t))e^{\alpha x + \beta t} \\ u_t = \frac{\delta u}{\delta t}(x, t) = (\beta v(x, t) + v_t(x, t))e^{\alpha x + \beta t} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation $u_t = u_{xx} + u_x$, on obtient :
(on simplifie $e^{\alpha x + \beta t}$ de part et d'autre de l'équation)

$$\begin{aligned} \beta v + v_t &= \alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx} + \alpha v + v_x \\ \Rightarrow v_t &= (\alpha^2 + \alpha - \beta)v + (2\alpha + 1)v_x + v_{xx} \end{aligned}$$

v est solution de l'équation de chaleur $v_t = v_{xx}$ Si et Seulement si,

$$\begin{cases} 2\alpha + 1 = 0 \\ \alpha^2 + \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc $u(x, t) = e^{-(\frac{x}{2} + \frac{t}{4})} v(x, t)$

1.3 Nouvelles conditions aux limites et initiale pour v

$$u(x, 0) = e^{-\frac{x}{2}} v(x, 0) = e^{-0.5x} x(x - 1)$$

$\Rightarrow v(x, 0) = x(x - 1)$: condition initiale.

$$u(0, t) = e^{-\frac{t}{4}} v(0, t) = 0 \text{ et } e^{-\frac{t}{4}} \neq 0 \Rightarrow v(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = e^{-(\frac{1}{2} + \frac{t}{4})} v(1, t) = 0 \text{ et } e^{-(\frac{1}{2} + \frac{t}{4})} \neq 0 \Rightarrow v(1, t) = 0$$

D'où $v(0, t) = 0$ et $v(1, t) = 0$ sont les nouvelles conditions aux limites.

1.4 Résolution du problème aux limites pour l'équation de chaleur obtenue

Soit le système :

$$S = \begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(x, 0) = x(x-1) \\ v(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{et } v(1, t) = 0$$

On utilise la méthode de séparation de variables :

$$v(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\text{On trouve : } \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Conditions aux limites :} \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(t) = Ce^{-\lambda t} \\ \lambda_n = n^2 \pi^2 \\ X_n(x) = \sin(n\pi x) \end{cases}$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

Vérification des conditions initiales :

$$x(x-1) = v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)$$

Les coefficients C_k doivent être les coefficients de Fourier :

$$C_n = 2 \int_0^1 x(x-1) \sin(n\pi x) dx$$

On intègre par partie :

$$\text{on pose : } \begin{cases} u = x(x-1) \\ u' = 2x-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \\ v' = \sin(n\pi x) \end{cases}$$

$$C_n = 2([x(x-1) \cdot \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x)]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 (2x-1) \cos(n\pi x) dx)$$

$$\text{or, } [x(x-1) \cdot \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x)]_0^1 = 0$$

$$\text{donc, } C_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 (2x-1) \cos(n\pi x) dx$$

On refait une intégration par partie, en posant cette fois :

$$\text{IPP} : \begin{cases} u = 2x - 1 \\ u' = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \\ v' = \cos(n\pi x) \end{cases}$$

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \left(\left[(2x - 1) \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \right)$$

$$C_n = \frac{-4}{(n\pi)^2} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx$$

$$C_n = \frac{-4}{(n\pi)^2} \left[\frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right]_0^1$$

$$C_n = \frac{4}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1)$$

D'où

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

1.5 Résolution

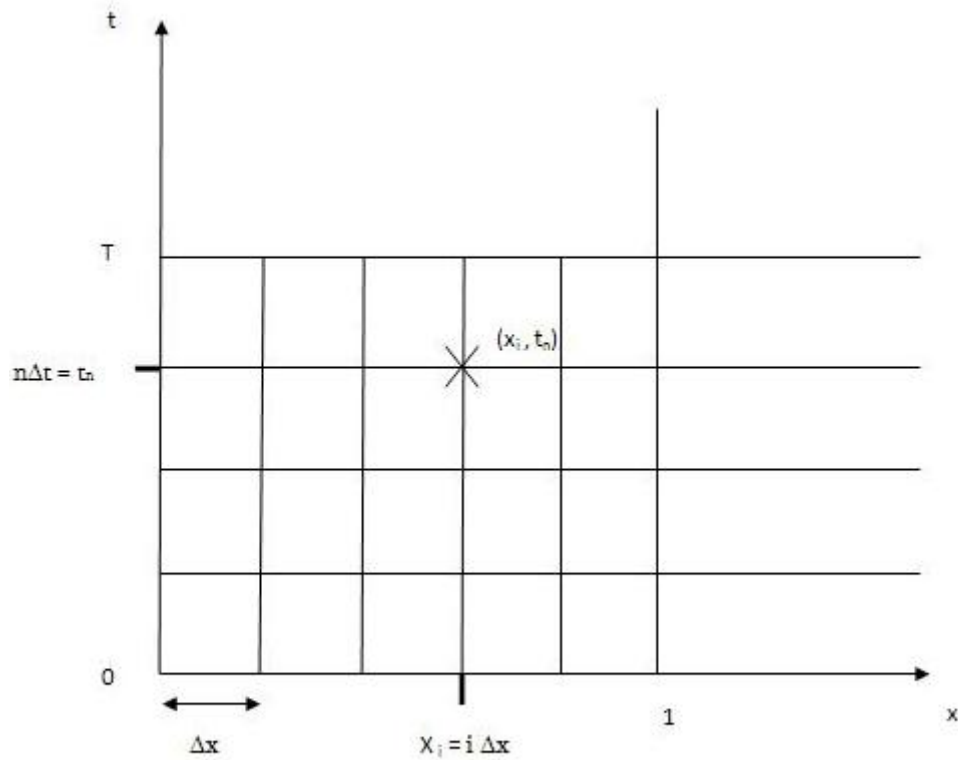
$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= e^{-(\frac{x}{2} + \frac{t}{4})} v(x, t) \\
 &= e^{-(\frac{x}{2} + \frac{t}{4})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) \\
 &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{(n\pi)^3} e^{-(\frac{1}{4} + n^2 \pi^2)t} e^{-\frac{x}{2}} \sin(n\pi x)
 \end{aligned}$$

2 Résolution Numérique

On rappelle le problème :

$$E = \begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x & \text{si } x \in]0, 1[; t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-0.5x} x(x-1) \\ u(0, t) = 0; u(1, t) = 0 \end{cases}$$

2.1 Définissons une grille sur le rectangle $[0, L] \times [0, T]$



2.2 On discrétise les conditions aux limites et les conditions initiales

$$u(i, n) = u(x_i, t_n) = u(i\Delta x, n\Delta t)$$

Conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x) = U_i^0$$

$$\forall i : 0 \dots N+1 \quad u(x_i, 0) = f(i\Delta x) = e^{-0.5i\Delta x} i\Delta x (i\Delta x - 1)$$

Conditions aux limites

$$u(0, t) = f(t) = 0$$

$$u(1, t) = f(t) = 0$$

2.3 On discrétise l'Equation à l'aide de la méthode de Cranck-Nicolson

On pose $n : 1 \dots N+1$ et $i : 0 \dots N+1$

Alors, pour tout i et pour tout t , on a :

$$u_t = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}$$

$$u_x = \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$u_{xx} = \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - 2U_i^n}{(\Delta x)^2}$$

Appliquons la méthode d'Euler explicite, en multipliant par Δt :

Donc, en partant de $u_t = u_{xx} + u_x$, il vient :

$$U_i^{n+1} - U_i^n = (\Delta t/2) \left(\frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n - 2U_i^n}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i+1}^{n+1} + U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right)$$

$$U_{i+1}^{n+1} \underbrace{\left(\frac{-\Delta t}{2(\Delta x)^2} - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \right)}_A + U_i^{n+1} \underbrace{\left(1 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right)}_D + U_{i-1}^{n+1} \underbrace{\left(\frac{-\Delta t}{2(\Delta x)^2} + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \right)}_B$$

$$= \underbrace{U_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \right) + U_i^n \left(1 - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) + U_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \right)}_{K_i^n}$$

Ainsi, on a :

$$BU_{i-1}^{n+1} + DU_i^{n+1} + AU_{i+1}^{n+1} = K_i^n$$

Pour $i = 1$

$$\underbrace{BU_0^{n+1}}_{=0} + DU_1^{n+1} + AU_2^{n+1} = K_1^n$$

Pour $i = 2$

Pour $i = 3$

|

|
 Pour $i = N$
$$BU_{N-1}^{n+1} + DU_N^{n+1} + \underbrace{AU_{N+1}^{n+1}}_{=0} = K_N^n$$

En effet, $U_0^{n+1} = u(t + \Delta t, 0) = 0$ et $U_{N+1}^{n+1} = u(t + \Delta t, 1) = 0$
 D'où finalement,

$$\begin{pmatrix} D & A & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ B & D & A & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & B & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & A \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1^n \\ K_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ K_N^n \end{pmatrix}$$

2.4 Sous forme matricielle, les équations aux différences finies donnent :

$$MU^{n+1} = K^n$$

$$U^{n+1} = M^{-1}K^n$$

$\implies$ Méthode Implicite

Il existe l'algorithme de Thomas pour inverser la matrice M.

cf programme C++

En utilisant l'algorithme de Thomas, on pose :

$$\begin{cases} d_i^* = d_i - \frac{d_{i-1}b_i}{d_{i-1}^*} \\ k_i^* = k_i - \frac{b_i k_{i-1}^*}{d_{i-1}^*} \end{cases} \quad \text{pour } i = 2, 3, \dots, N$$

et

$$\begin{cases} d_1^* = d_1 \\ k_1^* = k_1 \end{cases}$$

On trouve :

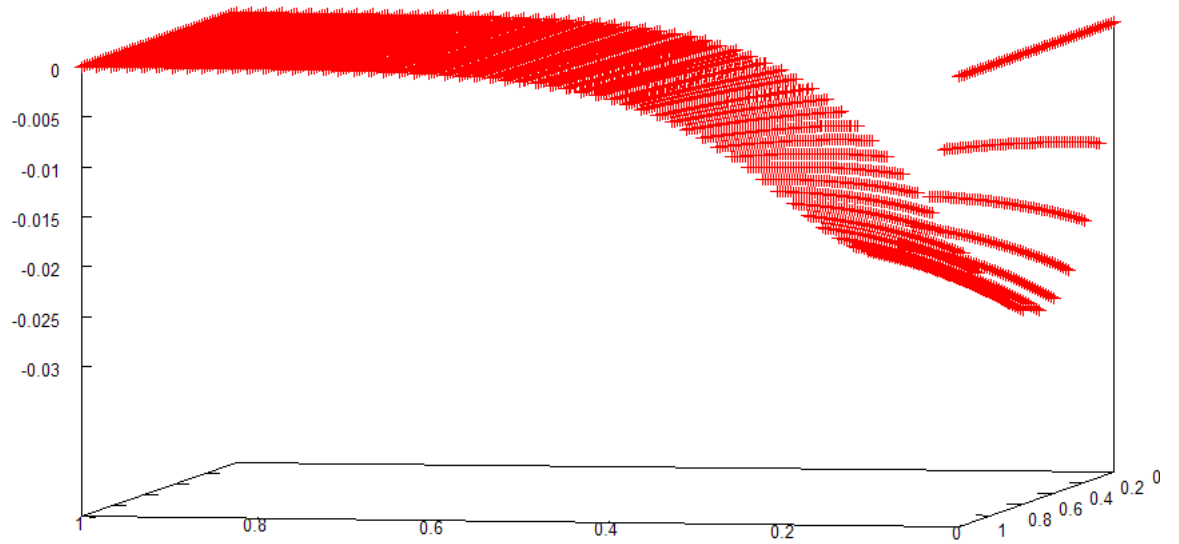
$$U_i = \frac{K_i^* - a_i U_{i+1}}{d_i^*}$$

$$U_N = \frac{K_N^*}{d_N^*}$$

Ainsi, on calcule le dernier terme et on calcule tous les termes inférieurs par une récurrence décroissante.

3 Comparaison des résultats

La solution analytique obtenue dans la partie I donne :



La solution numérique obtenue dans la partie II donne :

