



I (12 Pts.)

I. (i).

Evaluer l'intégrale suivante par application de deux méthodes différentes :

$$I = \oint_C \frac{\sinh z}{z(2z^2 - z - 3)} dz$$

où

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = 2\}.$$

Indication. On pourra utiliser :

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

I. (ii).

Résoudre l'équation intégrale suivante par rapport à la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$:

$$\int_0^{+\infty} \exp(-2u) f(t-u) du = \exp(-t) \quad (D.0)$$

Résoudre ce problème en réalisant les étapes suivantes.

a.1) Montrer que les fonctions du type :

$$g_k(t) = \exp(-kt) \text{ avec } k > 0$$

appartiennent à $L^2(t > 0)$, et que par conséquent leurs transformées de Fourier existent dans l'espace dual L^{2*} .

a.2) Calculer la transformée de Fourier en cosinus de la fonction : $g_k(t)$ et ainsi déterminer les transformées de Fourier en cosinus respectives

$$\mathcal{F}_c[\exp(-2t)] \quad \mathcal{F}_c[\exp(-t)]$$

$$\text{Rappel : } \begin{cases} \mathcal{F}_c[g(t)] = \int_0^{+\infty} \cos(\alpha t) g(t) dt \equiv G(\alpha) \end{cases}$$

b) Appliquer la transformée de Fourier en cosinus aux 2 membres de (D.0) en utilisant aussi le théorème de la convolution correspondant :

$$\text{Rappel : } \mathcal{F}_c[f_1 * f_2](\alpha) = 2\mathcal{F}_c[f_1]\mathcal{F}_c[f_2]$$

et trouver la transformée de Fourier en cosinus de la fonction inconnue f : $\mathcal{F}_c[f](\alpha)$.

- c) Appliquer le théorème de la transformée de Fourier inverse en cosinus (V. Rappel ci-dessous) et en utilisant les étapes de la méthode des fonctions analytiques (**Contour de Jordan**, attention $\alpha > 0$) trouver la solution $f(t)$ du problème (D.0).

$$\text{Rappel : } \left\{ \mathcal{F}_c^{-1}[G(\alpha)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\alpha t) G(\alpha) d\alpha \right.$$

II (8 Pts.)

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état (en fonction du temps) est décrit par la fonction f , qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{P}) \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 5 \frac{df(t)}{dt} - 6f(t) = -2e^{-t}$$

en supposant que :

$$\frac{df}{dt} \Big|_{t=0} = 1; \quad f(t=0) = 0.$$

Résoudre ce problème selon les 3 étapes suivantes :

- Par application de la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation ($\mathcal{P}$) trouver $L(p)$, transformée de Laplace de f .
- Par application de la transformée de *Laplace inverse* et des propriétés des fonctions analytiques (**Contour De Bromwich en 3 étapes**) trouver la solution f de l'équation différentielle.