

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**1re Année Ingénieurs****Devoir surveillé n° 2 a (Rattrapage)****Analyse donné le 7 mars 2014 (Durée 2h.)**

(Tout document et calculatrices sont interdits.)

I (3 Pts.)

Résoudre le problème d'optimisation suivant par la **méthode de substitution** et la méthode des **multiplicateurs de Lagrange** :

$$\text{Optimiser } \{G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 4x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_2 + 2x_3 + x_4\}$$

$$\text{sous les contraintes : } \begin{cases} g_1(x_1, x_3) = x_3 - \frac{1}{2}x_1 + 2 = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_4) = x_4 - x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

II A (3 Pts.)

1. Soit $E, \|\cdot\|$, un espace vectoriel normé et soit A une partie convexe de E . Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto d(x, A) \end{aligned}$$

est convexe sur E

Indication $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ et $d(x, a) = \|x - a\|$

2. Soit A une partie convexe d'un espace topologique X . Montrer que la fermeture $\bar{A}$ de A est aussi un convexe de X .
3. Montrer que si E est un espace de Banach et F est un fermé de E , alors F est aussi un espace de Banach.

II B (4 Pts.)

- i) Soit $(\mathbb{R}, d)$ l'espace métrique des nombres réels muni de la distance habituelle $d(x, y) = |x - y|$. Est-il un espace de Banach ou de Hilbert ?
- ii) On considère la fonction numérique :

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto \frac{x+1}{x+2} \end{aligned}$$

- 1) Etudier la convexité ou la concavité de la fonction f .
- 2) Est ce que l'image de $[0, +\infty[$ par f est un connexe ? Justifier votre réponse directement en utilisant un théorème du cours. Donner une démonstration de ce-dernier.
- 3) Montrer que la fonction f est une contraction sur $[0, +\infty[$ (par rapport à la distance habituelle sur $\mathbb{R}$).
- 4) Donner l'énoncé du théorème du point fixe global.
- 5) Justifier l'existence d'un point fixe unique de $x_0 \in [0, +\infty[$ de f et puis calculer ce point fixe.

III. (i) (3 Pts.)

Evaluer l'intégrale suivante par application de deux méthodes différentes :

$$I = \oint_C \frac{dz}{(z-3)(z-2)}$$

où

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2, 5\}.$$

III ii) (3 Pts.) Soit l'équation intégrale suivante par rapport à la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^+$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f_2(t-u)du + f_1(t) = g(t) \quad (D.0)$$

En supposant que $g, f_1, f_2 \in L^2$ continues, (f_1, f_2) connues et que leurs transformées de Fourier respectives F_g, F_1, F_2 existent dans l'espace dual L^{2*} , résoudre ce problème selon les étapes suivantes.

- Donner l'énoncé du théorème de convolution dans l'espace L^2 .
- Appliquer la transformée de Fourier aux 2 membres de (D.0) en utilisant aussi le théorème de la convolution, et trouver la transformée de Fourier de la fonction inconnue $f : \mathcal{F}[g](\alpha) = F_g(\alpha)$
- Appliquer le théorème de la transformée de Fourier inverse et donner la solution $g(t)$ du problème (D.0) sous forme d'une intégrale (en termes des transformées de Fourier des fonctions f_1, f_2).

Rappel : $\forall h \in L^2(\text{continue } \forall t),$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\alpha)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha t) G(\alpha) d\alpha$$

où $G(\alpha)$ est la transformée de Fourier de h .

IV (4 Pts.)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{P}) \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 9f(t) = 8\sin t$$

en supposant que : $\frac{df}{dt}|_{t=0} = 0; \quad f(t=0) = 1.$

Résoudre ce problème selon les étapes suivantes :

- Par application de la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (P) trouver $L(p)$, transformée de Laplace de f .
- Par application de la transformée de Laplace inverse et des propriétés des fonctions analytiques (Contour de Bromwich) trouver la solution f de l'équation différentielle.