

MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR  
ANALYSE I  
(Ch.7-8)  
INTEGRATION V. (F)

Support du cours donné en 1<sup>re</sup> année  
par Marietta Manolessou  
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010



# Table des matières

|          |                                                                                    |          |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>7</b> | <b>Introduction</b>                                                                |          |
|          | <b>aux fonctions analytiques</b>                                                   |          |
|          | <b>III</b>                                                                         | <b>1</b> |
| 1        | Zéros - Singularités - Pôles - Résidus . . . . .                                   | 1        |
| 1        | Zéros . . . . .                                                                    | 1        |
| 2        | Singularités - Pôles . . . . .                                                     | 2        |
| 3        | Fonctions multiformes et points de branchements . . . . .                          | 4        |
| 4        | Résidus - Théorème des Résidus . . . . .                                           | 5        |
| <b>8</b> | <b>Introduction</b>                                                                |          |
|          | <b>aux fonctions analytiques</b>                                                   |          |
|          | <b>IV</b>                                                                          | <b>9</b> |
| 1        | Calcul d'Intégrales . . . . .                                                      | 9        |
| 1        | Intégrales du type : $\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ . . . . . | 9        |
| 2        | Intégrale du type : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . . . . .                   | 11       |
| 3        | Intégrales du type : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx$ . . . . .    | 14       |
| 2        | Contour de Bromwich et Transformée de Laplace inverse . . . . .                    | 19       |
| 1        | Théorème de Bromwich . . . . .                                                     | 19       |
| 3        | Stabilité des circuits amplificateurs . . . . .                                    | 21       |
| 1        | Instabilité . . . . .                                                              | 22       |
| 2        | Etude des zéros . . . . .                                                          | 22       |
| 3        | Contrôle des zéros . . . . .                                                       | 23       |



# Table des figures

|     |                                                                                    |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 7.1 | La courbe fermée $\tilde{C}_1$ appartient à la couronne $R_1 < R < R'_1$ . . . . . | 6  |
| 7.2 | Le contour fermé excluant les pôles . . . . .                                      | 7  |
| 8.1 | Le contour est le cercle unité . . . . .                                           | 10 |
| 8.2 | Contour de Jordan au demi-plan supérieur . . . . .                                 | 11 |
| 8.3 | $\sin \theta \geq 2\frac{\theta}{\pi}$ . . . . .                                   | 12 |
| 8.4 | Le contour $C'_R$ de Jordan appartient au demi-plan inférieur. . . . .             | 13 |
| 8.5 | Contour pour un pôle réel à $z = x_0$ . . . . .                                    | 15 |
| 8.6 | Contour pour les deux pôles réels à $z = -\sigma$ et $z = \sigma$ . . . . .        | 17 |
| 8.7 | Plan P et contour de Bromwich . . . . .                                            | 20 |
| 8.8 | Circuit $S_A$ d'un amplificateur . . . . .                                         | 21 |



# Chapitre 7

## Introduction aux fonctions analytiques III

### 1 Zéros - Singularités - Pôles - Résidus

#### 1 Zéros

**Définition 7.1.**

Soit  $f \in H(\Omega)$ . On dit que la fonction analytique  $f$  a un **zéro d'ordre  $n$**  en  $z = z_0 \in \Omega$ , si

$$f(z_0) = \frac{df}{dz} \Big|_{z=z_0} = \dots = \frac{d^{(n-1)}f(z)}{dz^{(n-1)}} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (7.1.1)$$

$$\text{mais} \quad \frac{d^n f}{dz^n} \Big|_{z=z_0} \neq 0$$

D'après cette définition le développement de Taylor de  $f$  s'annule jusqu'à l'ordre  $(n-1)$  et on écrit :

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z) \quad (7.1.2)$$

où  $h(z)$  est une fonction analytique ne s'annulant pas à  $z = z_0$ .

**Remarque 7.1.**

Comme  $h(z)$  est une fonction continue en  $z = z_0$ , elle doit vérifier  $h(z) \neq 0$  pour tout voisinage  $\mathcal{V}(z_0)$  de  $z_0$ . Ceci permet de montrer une propriété très importante des fonctions analytiques :

**Théorème 7.1.**

Les zéros d'une fonction analytique ne peuvent pas être **des points d'accumulation** pour  $f$  **sauf si**  $f(z) = 0$  partout dans  $\mathbb{C}$ .

## 2 Singularités - Pôles

### Définition 7.2.

On dit que  $z = z_0$  est un **point singulier isolé** ou une **singularité isolée** de  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  si la fonction  $f$  n'est pas analytique en  $z_0$  mais elle est analytique en tout voisinage de  $z_0$  :

### Définition 7.3.

On considère le développement en série de Laurent d'une fonction  $f$  analytique à l'intérieur d'une couronne  $S$  et ayant comme singularité isolée ( $z = z_0$ )

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \dots \quad (7.1.3)$$

Si tous les coefficients  $b_{m'}$  s'annulent pour  $m' \geq m + 1$  alors on dit que le point  $z_0$  est un **pôle d'ordre**  $m < \infty$  pour  $f$  et le coefficient  $b_1$  s'appelle le **résidu** de ce pôle.

La somme :  $\frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$  s'appelle la **partie principale** de  $f$ . (Attention  $m < \infty$ )

On vérifie facilement la proposition suivante :

### Proposition 7.1.

Si la fonction "inverse"  $\frac{1}{f}$  a un zéro d'ordre  $n$ , alors  $f$  a un pôle d'ordre  $n$ .

### Remarque 7.2.

On appelle **pôle simple** le pôle d'ordre  $n = 1$ .

### Exemple 7.1.

La fonction  $f(z) = \frac{z}{(z - 5)^2(z + 1)}$  (*resp.*  $\frac{1}{f}$ ) a deux singularités isolées (*resp.* 2 zéros), un pôle d'ordre 2 en  $z = 5$ . (*resp.* un zéro double en  $z = +5$ ) et un pôle simple en  $z = -1$  (*resp.* un zéro simple en  $z = -1$ ).

De plus  $f$  a un zéro simple en  $z = 0$  (*resp.*  $\frac{1}{f}$  a un pôle simple en  $z = 0$ ).

### Définition 7.4.

Si  $f$  est une **fonction analytique** dans  $\Omega$  à l'exception de **points isolés singuliers** (pôles) alors on dit que  $f$  est une fonction **méromorphe**

La fonction  $f$  de l'exemple précédent est une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$ .

### Définition 7.5.

Si la série de Laurent (7.1.3) continue jusqu'à  $m = -\infty$ , on dit que  $z = 0$  est un **pôle d'ordre infini**, ou qu'il s'agit d'une **singularité essentielle**.

### Exemple 7.2.

La fonction :  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  présente une singularité essentielle en  $z = 0$  car :

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n}$$

Le résultat suivant est une conséquence directe des définitions précédentes (pôles et zéros) et des théorèmes fondamentaux de la première partie de ce cours, et son importance est fondamentale en raison de ses nombreuses applications.

**Théorème 7.2.**

i) Soit  $f$  une **fonction méromorphe** dans le domaine  $\Omega$  qui est limité par une courbe  $\Gamma$  tel que  $f$  n'a pas de zéros ni de pôles sur  $\Gamma$ . Soit  $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \phi(z) dz = \sum_{j=1}^p n_j \phi(a_j) - \sum_{k=1}^q m_k \phi(b_k) \quad (7.1.4)$$

où  $a_1, \dots, a_p$  (resp  $n_1, \dots, n_p$ ) sont les zéros de  $f$  (resp. leurs multiplicités) et  $b_1, \dots, b_q$  (resp  $m_1, \dots, m_q$ ) sont les pôles de  $f$  (resp. leurs multiplicités).

ii) Le nombre  $\tilde{p}$ , des zéros d'une fonction  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  est égal à :

$$\tilde{p} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (7.1.5)$$

(chacun des zéros étant compté avec son ordre de multiplicité) où  $\Gamma$  est la courbe fermée qui délimite le domaine  $\Omega$ .

iii) La somme  $S_p$  des zéros (en les comptant par leur multiplicité) d'une fonction  $f(z)$  holomorphe dans le domaine  $\Omega$  limité par une courbe fermée  $\Gamma$ , est égale à

$$S_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz \quad (7.1.6)$$

**Preuve**

i) Tenant compte des définitions des pôles et des zéros de  $f$  on écrit :

$$f(z) = \frac{(z - a_1)^{n_1} \dots (z - a_p)^{n_p}}{(z - b_1)^{m_1} \dots (z - b_q)^{m_q}} g(z) \quad (7.1.7)$$

où  $g(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$  est une fonction non nulle sur  $\Omega$ . En définissant la dérivée logarithmique d'une manière analogue que pour les fonctions d'une variable réelle on a :

$$\frac{d(\ln f(z))}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (7.1.8)$$

D'après (7.1.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \ln f &= \sum_{j=1}^p n_j \ln(z - a_j) - \sum_{k=1}^q m_k \ln(z - b_k) + \ln g(z) \\ \text{et } \frac{f'(z)}{f(z)} &= \sum_{j=1}^p \frac{n_j}{z - a_j} - \sum_{k=1}^q \frac{m_k}{z - b_k} + \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

où la fonction  $\frac{g'}{g} \in \mathcal{H}(\Omega)$  est non nulle dans  $\Omega$ . En multipliant les deux membres de (7.1.9) par  $\frac{\phi(z)}{2\pi i}$  (fonction analytique dans  $\Omega$ ), on intègre sur le contour fermé  $\Gamma$  en appliquant les théorèmes de Cauchy. On obtient :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} \phi dz = \sum_{j=1}^p n_j \phi(a_j) - \sum_{k=1}^q m_k \phi(b_k) \quad (7.1.10)$$

- ii) La preuve est obtenue directement de i). Si on pose  $\phi(z) = 1$  et en supposant que  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  (sans pôles) l'équation précédente (7.1.10) donne :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^q n_j = \tilde{p} \quad (7.1.11)$$

- iii) La preuve est résultat direct de i) en posant  $\phi(z) = z$  et en supposant que  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  (et encore sans pôles) :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} z dz = \sum_{j=1}^q n_j a_j = S_p \quad (7.1.12)$$

### 3 Fonctions multiformes et points de branchements

#### Définition 7.6.

A part les singularités essentielles et les pôles, les fonctions d'une variable complexe peuvent présenter un autre type de singularité, qui est reliée avec la “**non uniformité**” de certaines fonctions. Autrement dit, il existe des fonctions d'une variable complexe qui prennent deux (ou plusieurs) **valeurs différentes au même point**  $z$  du plan complexe. On dit qu'elles sont des “**fonctions multiformes**”.

On donne l'exemple le plus typique de cette classe de fonctions qui est d'ailleurs très couramment utilisé, le  $\ln z$ .

#### Exemple 7.3.

On considère la fonction logarithme népérien défini par :

$$f : z \mapsto f(z) \quad \text{avec } f(z) \text{ telle que } e^{f(z)} = z \quad (7.1.13)$$

et on note  $f(z) = \ln z$

En utilisant les expressions :

$$\begin{cases} f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) + i\operatorname{Im}(f(z)) \\ z = re^{i\phi} \quad (r \equiv |z|, \phi \equiv \arg(z)) \end{cases} \quad (7.1.14)$$

On écrit  $e^{\operatorname{Re}[f] + i\operatorname{Im}[f]} = r \cos \phi + i r \sin \phi$

ou  $e^{\operatorname{Re}[f]} [\cos(\operatorname{Im}[f]) + i \sin(\operatorname{Im}[f])] = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

En identifiant parties réelles et imaginaires :

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\operatorname{Re}[f]} \cos(\operatorname{Im}[f]) = r \cos \phi \\ e^{\operatorname{Re}[f]} \sin(\operatorname{Im}[f]) = r \sin \phi \end{cases} \quad (7.1.15)$$

On obtient d'après (7.1.15)

$$e^{\operatorname{Re}[f]} = r \Rightarrow \ln r = \operatorname{Re}[f]$$

et

$$\phi + 2k\pi = \operatorname{Im}[f] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc finalement :

$$\ln z = \ln r + i(\phi + 2k\pi) \quad (7.1.16)$$

On constate que pour le même point  $z \in \mathbb{C}$  (car il s'agit toujours du même point  $z$  dans le plan  $\mathbb{C}$  si  $\psi = \psi_0$  ou si  $\psi = \psi_0 + 2k\pi$ ), on obtient une infinité de valeurs différentes de la partie imaginaire du  $\ln z$ , donc une **infinité d'images différentes** de  $z$  par l'application  $z \rightarrow \ln z$ .

Pour cette raison, on utilise en pratique une fonction uniforme qu'on appelle **partie principale du logarithme** définie par :

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i\theta \quad \text{avec } -\pi < \theta < \pi \quad (7.1.17)$$

Cette fonction a une **discontinuité** sur l'axe **réel négatif** donné par la limite :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \operatorname{Ln} \left( |z| e^{i(\pi+\varepsilon)} \right) - \operatorname{Ln} \left( |z| e^{i(\pi-\varepsilon)} \right) \right] = \ln |z| + i\pi - \ln |z| + i\pi = 2\pi i \quad (7.1.18)$$

Dans la région :  $\Omega = \mathbb{C} / \{\mathbb{R}^-\}$  (plan complexe entier, excepté l'axe réel négatif) la fonction  $\operatorname{Ln} z$  est analytique.

On appelle l'axe  $\mathbb{R}^-$  **coupure** et les points  $z = 0$  et  $z = \infty$  **points de branchements de  $\ln z$**

#### 4 Résidus - Théorème des Résidus

On a vu que le premier coefficient  $b_1$  du développement (v. 7.3) en série de Laurent d'une fonction méromorphe ayant un pôle d'ordre  $n$  au point  $z = z_0$ , s'appelle **résidu**.

On donne une autre définition (qui souvent est la plus commode à utiliser).

**Définition 7.7.** Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe dans le domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  alors le résidu de  $f$  à  $z = z_0$  est donné par la limite suivante :

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \right\} \quad (7.1.19)$$

Pour le cas particulier du pôle simple ( $n = 1$ ) on a simplement :

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (7.1.20)$$

##### Exemple 7.4.

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 + 5z + 3}{(z-1)(z+2)^2}$$

On constate que  $f(z)$  a un pôle d'ordre 1 à  $z = z_1 = 1$  et un pôle d'ordre 2 à  $z = z_2 = -2$  et d'après la définition 7.7 on aura :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(-2) &= \lim_{z \rightarrow -2} \left[ \frac{d}{dz} (z+2)^2 \left[ \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{z-1} \right] \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \left[ \frac{2(z+2)(z-1) - (z+2)^2}{(z-1)^2} \right] = 0 \\ \text{et } \operatorname{Res} f(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)}{(z+2)^2} + 1 \right] = 1 \end{aligned}$$

**Remarque :** Pour une présentation plus élégante, on a effectué une décomposition en éléments simples, mais les mêmes résultats auraient pu être obtenus par un calcul direct.

Et voici le théorème crucial pour les applications (surtout en intégration) des fonctions analytiques : le théorème des résidus.

**Théorème 7.3** (Théorème des résidus).

Soit  $f$  une fonction méromorphe dans le domaine  $\Omega$  ayant les points  $z_1 \dots z_k$  comme pôles à l'intérieur d'une courbe fermée  $C$ . L'intégrale sur  $C$  de  $f$  égale :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k \text{Res } f(z_i) \quad (7.1.21)$$

**Preuve du Théorème 7.3**

En écrivant la série de Laurent pour une des singularités isolées de  $f$  (par exemple  $z_1$ ) et en intégrant terme à terme sur un cercle  $C$  qui entoure le pôle  $z_1$ , on aura :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_1)^n \quad (7.1.22)$$

(Rappel :  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\tilde{C}_1} \frac{f(z')}{(z' - z_1)^{n+1}} dz'$

et  $\tilde{C}_1$  est une courbe fermée appartenant à la couronne  $R_1 < R < R'_1$  (v. fig. 7.1

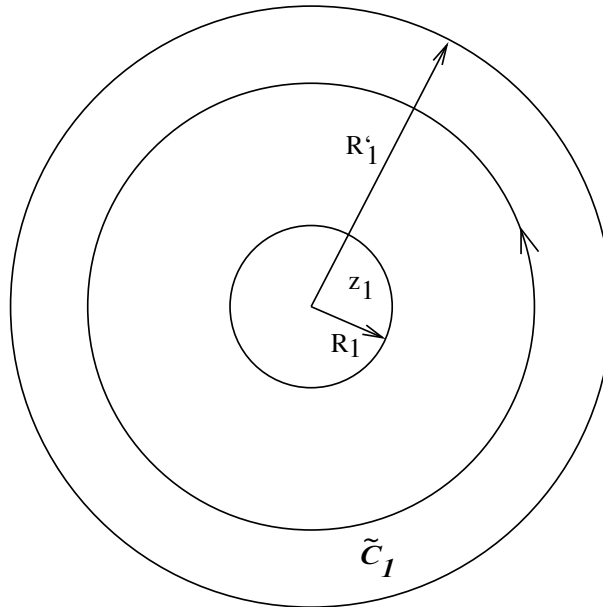


FIG. 7.1 – La courbe fermée  $\tilde{C}_1$  appartient à la couronne  $R_1 < R < R'_1$

et :

$$a_n \oint_{C_1} (z - z_1)^n dz = a_n \left[ \frac{(z - z_1)^{n+1}}{n+1} \right]_{z_0}^{z_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ a_{-1} \oint_{C_1} (z - z_1)^{-1} dz & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

avec :

$$a_{-1} \oint_C \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \text{Res } (f(z_1)) \text{ si } \mathbf{n=-1} \quad (7.1.23)$$

**Rappel :**  $a_{-1}$  est le résidu du pôle à  $z = z_1$ .

(Pour l'intégration du cas  $n = -1$ , on a utilisé les coordonnées polaires en posant  $z - z_1 = re^{i\theta}$ ).

Finalement on a :

$$\rightarrow \oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) \quad (7.1.24)$$

En choisissant un contour  $C_0$  qui entoure successivement toutes les singularités isolées de  $f$  (v. fig 7.2 avec  $C_0 = C \cup (\cup C_i)$  de façon à laisser à son extérieur tous les pôles de  $f$ , on écrira d'après le théorème de Cauchy :

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 0 \quad (7.1.25)$$

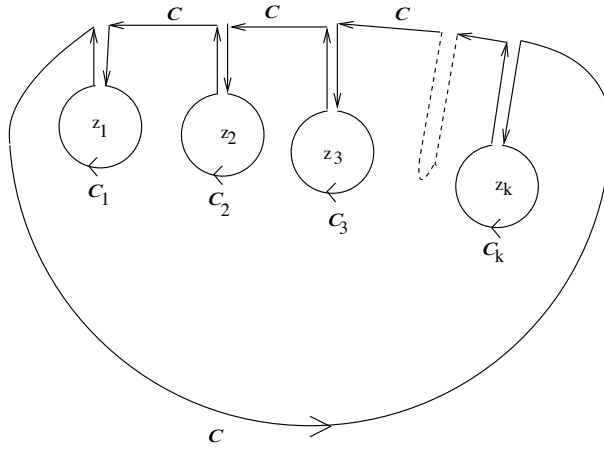


FIG. 7.2 – Le contour fermé excluant les pôles

où

$$\oint_C f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \dots - \oint_{C_k} f(z) dz = 0 \quad (7.1.26)$$

(où on a choisi le sens positif du parcours sur  $C$ ).

En répétant la procédure de l'évaluation précédente (pour le pôle  $z_1$ ) sur chacun des contours  $C_i$  séparément, on retrouve la formule des résidus :

$$\oint_{C_1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) \quad \text{d'après 7.1.24}$$

et

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} f(z_i) \quad \text{C.Q.F.D}$$

**Remarque 7.3** (Sur la preuve du théorème 7.3). Dans l'expression (7.1.26), les contributions des petits parcours  $r_i$ ,  $\bar{r}_i$ , s'annulent mutuellement et leurs distances deviennent négligeables à la limite de façon à reconstituer la courbe continue et fermée  $C$ .



## Chapitre 8

# Introduction aux fonctions analytiques IV

Ce dernier chapitre sur les fonctions analytiques est consacré à leurs applications. Nous ne présenterons ici que les trois principales parmi une multitude d'autres. Il s'agit essentiellement de techniques mathématiques élaborées pour être utilisées aux domaines de Physique, d'Electronique, des Sciences de l'Ingénieur, du Traitement du Signal, de Biologie, etc...

### 1 Calcul d'Intégrales

L'application directe du **Théorème des Résidus** fournit des moyens pratiques pour le calcul de plusieurs types d'intégrales.

#### 1 Intégrales du type : $\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (8.1.1)$$

où  $f$  est bien définie  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ , et est uniforme.

Par exemple,  $f$  est souvent une fonction rationnelle de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

Avec la transformation

$$z = e^{i\theta} \text{ et } dz = ie^{i\theta} d\theta \\ \text{ou } d\theta = -i \frac{dz}{z}$$

on a aussi :

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} ; \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \text{ et } I_1 \text{ devient :}$$

$$I_1 = -i \oint_{C_1} f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{z}$$

Le contour d'intégration  $C_1$  est tout simplement le cercle unité (v. fig. 8.1).

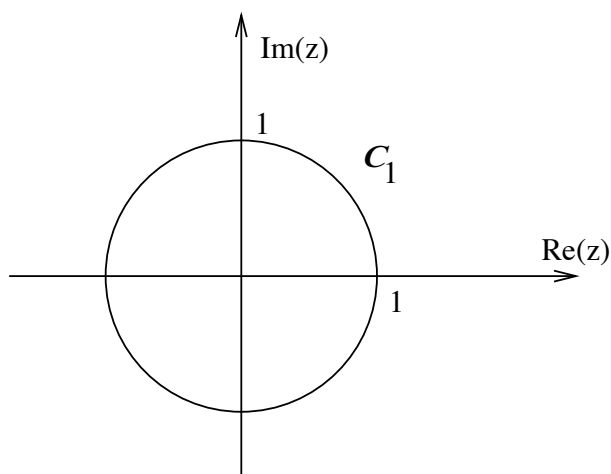


FIG. 8.1 – Le contour est le cercle unité

Par application du *Théorème des Résidus* on obtient :

$$I_1 = (-i)2\pi i \sum_{z_i} \operatorname{Res} \left( \frac{f}{z} \right) \Big|_{z=z_i} \quad (8.1.2)$$

où  $z_i$  sont les pôles de  $\frac{f(z)}{z}$  à l'intérieur du cercle unité centré à l'origine.

**Exemple 8.1.** Soit l'intégrale :

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin \theta} ; 0 \leq a^2 < 1$$

En posant

$$z = e^{i\theta}, \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \quad z \in C_1$$

$\Rightarrow J = 2 \oint_{C_1} \frac{dz}{az^2 + 2iz - a}$  l'intégrale présente 2 pôles simples :

$$z_+ = i \frac{(\sqrt{1-a^2} - 1)}{a}, \quad z_- = \frac{-i(\sqrt{1-a^2} + 1)}{a}$$

dont seulement  $z_+$  vérifie  $|z_+|^2 < 1$ , donc il appartient à l'intérieur du cercle unité  $C_1$ .

On trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \frac{2}{az^2 + 2iz - a} \Big|_{z=z_+} &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{2(z - z_+)}{a(z - z_+) \cdot (z - z_-)} \\ &= \frac{2}{a(z_+ - z_-)} \end{aligned}$$

ou

$$\operatorname{Res} \frac{2}{az^2 + 2iz - a} \Big|_{z=z_+} = \frac{-i}{\sqrt{1-a^2}}$$

et, par application de 8.1.2 :

$$\Rightarrow J = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

## 2 Intégrale du type : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (8.1.3)$$

### Conditions sur $f$

- a)  $f(z)$  est analytique à l'exception de quelques pôles au demi-plan supérieur.
- b)  $f(z)$  décroît uniformément par rapport à l'argument de  $z$  (avec  $0 \leq \arg z \leq \pi$ ) quand  $|z| \rightarrow +\infty$

Etant données ces conditions, on montre le résultat auxiliaire suivant, afin de pouvoir appliquer par la suite une déformation appropriée du contour et évaluer l'intégrale  $I_2$  (par application du *théorème des Résidus*, toujours !)

### Proposition 8.1 (Lemme de Jordan).

Soit  $\Gamma_R$ , le demi-cercle du contour  $C_R \subset \mathbb{C}$  représenté sur la fig 8.2 ; soit  $f(z)$  vérifiant la condition b) ci-dessus ; alors si  $\alpha > 0$ , l'intégrale  $I_R \equiv \int_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z) dz$  vérifie :

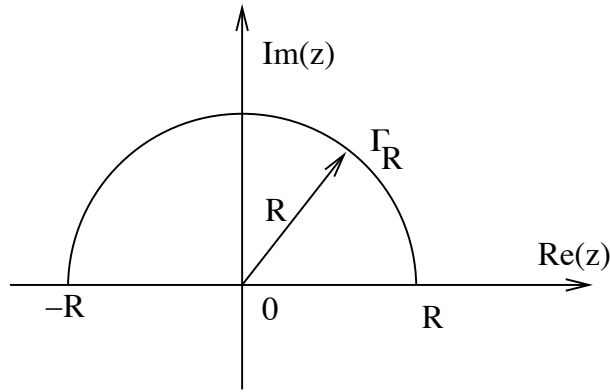


FIG. 8.2 – Contour de Jordan au demi-plan supérieur

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{iaz} f(z) dz \quad (8.1.4)$$

### Preuve du Lemme de Jordan

On utilise une transformation en coordonnées polaires :

$$z = R e^{i\theta}, \quad dz = i R e^{i\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow I_R = i \int_0^\pi f(R e^{i\theta}) e^{i\alpha R \cos \theta - \alpha R \sin \theta} R d\theta \quad (8.1.5)$$

et comme  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} f(z) = 0$  (unif. par rapport à  $\arg z$ ), on peut toujours trouver  $\varepsilon(R) > 0$  (qui dépend seulement de  $R$ ) t.q.  $\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon(R) = 0$  et  $|f(R e^{i\theta})| < \varepsilon(R)$ .

Donc on pourra majorer l'intégrale comme il suit :

$$|I_R| < \varepsilon(R)R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta = 2\varepsilon(R)R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \quad (8.1.6)$$

(où on a utilisé la symétrie de  $\sin \theta$  autour de  $\pi/2$ )

Mais  $\sin \theta \geq 2\frac{\theta}{\pi}$  pour  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (exercice à faire analytiquement)(voir fig.8.3)

**Preuve géométrique facile**

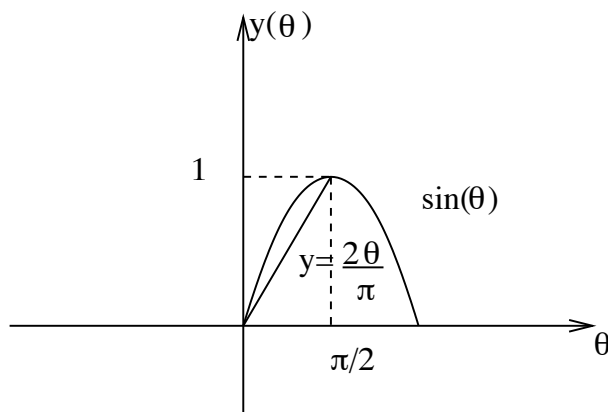


FIG. 8.3 –  $\sin \theta \geq 2\frac{\theta}{\pi}$

donc :

$$|I_R| < 2\varepsilon(R)R \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R\theta/\pi} d\theta \quad (8.1.7)$$

et par intégration directe :

$$|I_R| < \frac{\pi\varepsilon(R)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \quad (8.1.8)$$

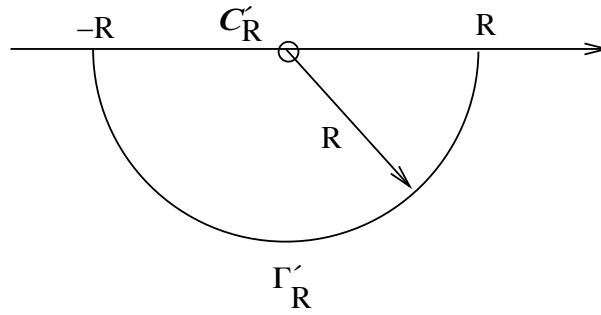
mais comme  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \pi \frac{\varepsilon(R)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) = 0$   
à cause de la borne (8.1.8)  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$  C.Q.F.D.

**Remarque 8.1.**

- i) Si  $\alpha = 0$  la borne analogue à (8.1.7) sera :  $|I_R| < \pi\varepsilon(R)R$  et en supposant que  $\exists k > 1$  et  $m > 0$  t.q.  $\varepsilon(R) < \frac{m}{R^k}$  l'argument est identique.
- ii) Si  $\alpha < 0$  on pourra choisir un contour  $C'_R$  tel que (v. fig. 8.4) le demi-cercle correspondant  $\Gamma'_R$  appartiendra au demi-plan inférieur et le résultat sera analogue.

**Exemple 8.2.** Soit l'intégrale

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \quad (8.1.9)$$

FIG. 8.4 – Le contour  $C'_R$  de Jordan appartient au demi-plan inférieur.

A cause de la parité de la fonction, on pourra écrire :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \quad (8.1.10)$$

Définissons l'intégrale :

$$I_R = \frac{1}{2} \oint_{C_R} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \text{ où } C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R \text{ (v. fig. 8.2)} \quad (8.1.11)$$

On aura :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-R}^{+R} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \quad (8.1.12)$$

En utilisant les coordonnées polaires pour l'intégrand de la 2ème intégrale (sur  $\Gamma_R$ ), on aura :

$$\begin{aligned} z = Re^{i\theta} \text{ et } f(z) &= \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \phi(R, \theta) \\ &= \frac{e^{2i\theta}}{R^2 \left[ e^{2i\theta} + \frac{1}{R^2} \right] \left[ e^{2i\theta} + \frac{4}{R^2} \right]} \end{aligned} \quad (8.1.13)$$

or, on voit que  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \phi(R, \theta) = 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi]$

En plus,  $f(z)$  a 4 pôles simples  $\left\{ \begin{matrix} z_1 = i & z_2 = -i \\ z_3 = 2i & z_4 = -2i \end{matrix} \right\}$  dont les 2 ( $z_1$  et  $z_3$ ) appartiennent au demi-plan supérieur, donc ils appartiennent à l'intérieur du contour  $C_R$ .

### Conclusion

Les conditions du Lemme de Jordan étant vérifiées, on applique directement cette proposition et on obtient une contribution nulle quand  $R \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0 \quad (8.1.14)$$

Par la suite,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = I_2 \quad (8.1.15)$$

Par ailleurs, en appliquant le *Théorème des Résidus* pour  $I_R$  (8.1.11), on a :

$$I_R = \pi i \sum_{\substack{z_1 \\ z_3}} \text{Res } f(z)|_{z=z_1, z_3} \left\{ \begin{array}{l} \text{où} \\ z_1 = i \\ z_3 = 2i \end{array} \right\} \quad (8.1.16)$$

$$\text{et } \text{Res } f(z)|_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{i}{6}$$

$$\text{Res } f(z)|_{z=2i} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{-i}{3}$$

Finalement (8.1.16) donne :

$$I_R = \pi i \left[ \frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right] = \frac{\pi}{6} = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R \quad (8.1.17)$$

Combinaison de (8.1.15) et (8.1.17) donne :

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = \frac{\pi}{6}$$

### 3 Intégrales du type : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \quad (8.1.18)$$

Souvent en Physique on a besoin d'évaluer des intégrales du type (8.1.18). A priori, cette intégrale n'a pas de sens mathématiquement, puisque l'intégrand présente une singularité sur l'axe  $] -\infty, +\infty[$  même si  $f(x)$  est analytique en  $x_0$  et a un très bon comportement à l'infini, autrement dit

$$|f(x)|_{|x| \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{|x^\alpha|} \text{ avec } \alpha > 0 \quad (8.1.19)$$

Pourtant, on peut "évaluer" cette intégrale en contournant la singularité. Par une procédure de limite, on choisit un contour qui entoure la singularité et qui est tel que les conditions physiques du problème particulier sont vérifiées.

On définit, en ce but, la "valeur principale" de l'intégrale  $I_3$  :

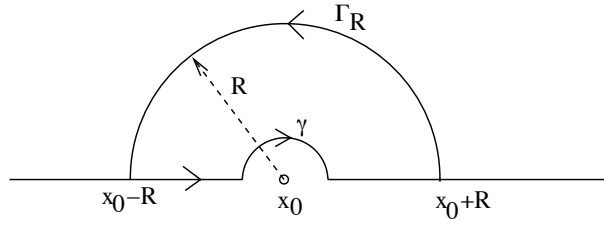
$$P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{x_0-r} \frac{f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+r}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right] \quad (8.1.20)$$

Pour le contour choisi :

$$C_{R,r} = \{-R+x_0, x_0-r\} \cup \gamma \cup \{x_0+r, R+x_0\} \cup \Gamma_R \quad \text{v. fig. 8.5}$$

On définit l'intégrale  $I_{R,r}$

$$\oint_{C_{R,r}} \frac{f(z)}{z-x_0} \equiv I_{R,r} \quad (8.1.21)$$

FIG. 8.5 – Contour pour un pôle réel à  $z = x_0$ 

et en décomposant sur chacune des parties

$$I_{R,r} = \int_{-R+x_0}^{-r+x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{+r+x_0}^{x_0+R} \frac{f(x)}{x-x_0} dx + \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-x_0} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-x_0} dz \quad (8.1.22)$$

En introduisant la définition de la valeur principale (8.1.20) on écrit

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow 0}} I_{R,r} = P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right] + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-x_0} dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-x_0} dz \quad (8.1.23)$$

Calculons la 2ème et 3ème intégrale du second membre en passant en coordonnées polaires :

Pour le demi-cercle  $\gamma$ , on pose  $z - x_0 = re^{i\phi} \Rightarrow dz = ire^{i\phi} d\phi$

et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-x_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{f(re^{i\phi} + x_0)}{re^{i\phi}} ire^{i\phi} d\phi = -if(x_0) \int_0^{\pi} d\phi = -i\pi f(x_0) \quad (8.1.24)$$

Pour le demi-cercle  $\Gamma_R$ , on pose

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \text{ et } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \left| \frac{f(z)dz}{z-x_0} \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \left| \frac{f(x_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} \right| d\theta = 0 \quad (8.1.25)$$

par **application du Lemme de Jordan** puisque  $f(z)$  vérifie la propriété de décroissance (8.1.19).

On introduit les résultats (8.1.24) et (8.1.25) au second membre de (8.1.23) et on obtient :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow 0}} I_{R,r} = P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right] - i\pi f(x_0) \quad (8.1.26)$$

Par ailleurs, comme le pôle  $z = x_0$  n'est pas inclus à l'intérieur du contour, le théorème de Cauchy donne :

$$I_{R,r} = 0 = \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ r \rightarrow 0}} I_{R,r} \quad (8.1.27)$$

Ce dernier résultat permet d'écrire d'après (8.1.26)

$$P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx \right] = i\pi f(x_0) \quad (8.1.28)$$

**Remarque 8.2** (important).

Le contour d'intégration  $C_{R,r}$ , présenté ci-dessus doit être choisi en fonction :

(Ra) du comportement de la fonction  $f$  quand  $|z| \rightarrow +\infty$  afin que les conditions du Lemme de Jordan soient vérifiées et

(Rb) des conditions physiques imposées au problème particulier.

Appliquons ces conclusions sur un exemple, souvent rencontré en électromagnétisme, en mécanique quantique ou classique et en électronique.

### Exemple 8.3.

L'étude de la diffusion des particules élémentaires (par exemple des électrons) par un potentiel conduit à une fonction définie par :

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - \sigma^2} dx \text{ où } \sigma > 0 \quad (8.1.29)$$

L'intégrand est une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$  avec 2 pôles simples sur l'axe réel,  $]-\infty, +\infty[$ .

On applique la méthode développée précédemment et on calcule la partie principale de cette intégrale

$$\begin{aligned} I_P(\sigma) &= P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - \sigma^2} dx \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\sigma-r} \frac{x \sin x}{(x-\sigma)(x+\sigma)} + \int_{-\sigma+r}^{\sigma-r} \frac{x \sin x}{(x-\sigma)(x+\sigma)} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\sigma+r}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x-\sigma)(x+\sigma)} \right\} \quad (8.1.30) \end{aligned}$$

On utilise :  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  et on considère l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{R,r}(\sigma) &= I_{R,r}^{(1)} + I_{R,r}^{(2)} \\ \text{avec } I_{R,r}^{(1)} &= \frac{1}{2i} \oint_{C_1^{R,r}} \frac{ze^{iz}}{z^2 - \sigma^2} dz \text{ et } I_{R,r}^{(2)} = \frac{-1}{2i} \oint_{C_2^{R,r}} \frac{ze^{-iz}}{z^2 - \sigma^2} dz \quad (8.1.31) \end{aligned}$$

Les intégrands de  $I_{R,r}^{(1)}$  et  $I_{R,r}^{(2)}$  ont deux pôles :  $\left. \begin{array}{l} z_+ = \sigma \\ z_- = -\sigma \end{array} \right\}$  sur l'axe des parties réelles.

Les contours fermés  $C_1^{R,r}$  et  $C_2^{R,r}$  sont représentés sur la figure (8.6) et ils sont choisis en accord avec les conditions (Ra) et (Rb) correspondantes. Plus précisément :

(1a) Le contour

$$C_1^{R,r} \equiv \{-R, -\sigma - r\} \cup \gamma_1 \cup \{-\sigma + r, \sigma - r\} \cup \gamma_2 \cup \{\sigma + r, R\} \cup \Gamma_R^{(1)}$$

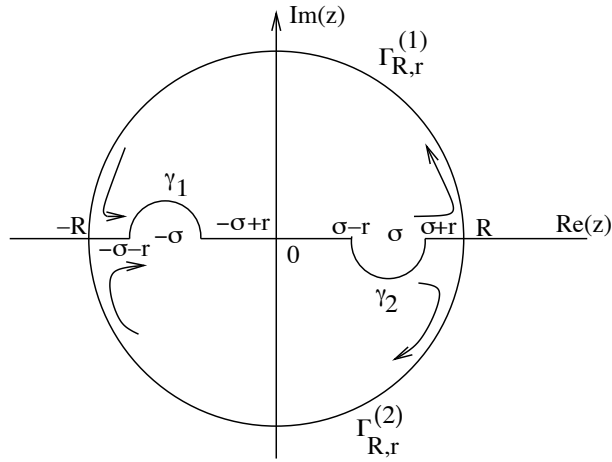
est choisi de telle manière que  $\Gamma_R^{(1)}$  soit dans le demi-plan  $\mathbb{C}$  supérieur, car :

$$e^{iz} = e^{i(\text{Re}z + i\text{Im}z)} = e^{i\text{Re}z} e^{-\text{Im}z}$$

et on aura décroissance de l'intégrand quand  $R \rightarrow \infty$  ssi  $\text{Im}z > 0$ .

Ainsi la condition (Ra) sera vérifiée et le Lemme de Jordan pourra être appliqué.

(1b) Les contours des petits demi-cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  autour des pôles sont choisis de façon à avoir un résultat du type  $\sim e^{i\sigma}$  (v. par la suite) ainsi la condition (Rb) sera vérifiée.

FIG. 8.6 – Contour pour les deux pôles réels à  $z = -\sigma$  et  $z = \sigma$ 

(2a) D'une manière analogue le demi-cercle  $\Gamma_R^{(2)}$  du contour :

$$C_2^{R,r} \equiv \{-R, -\sigma - r\} \cup \gamma_1 \cup \{-\sigma + r, \sigma - r\} \cup \gamma_2 \cup \{\sigma + r, R\} \cup \Gamma_R^{(2)}$$

est choisi dans le demi-plan  $\mathbb{C}$  inférieur car :

$$e^{-iz} = e^{-i(\text{Re}z + i\text{Im}z)} = e^{-i\text{Re}z} e^{\text{Im}z}$$

et l'intégrand décroîtra, (v.  $I_{R,r}^{(2)}$ ) ssi  $\text{Im}z < 0$ .

La condition donc (Ra) sera de nouveau vérifiée et le Lemme de Jordan sera appliqué.

(2b) Les contours  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les mêmes pour  $C_2^{R,r}$  et  $C_1^{R,r}$ , pour la même raison physique présentée en **(1b)**.

D'après la technique générale présentée ci-dessus on aura d'une part :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{R,r}^{(1)} = \frac{1}{2i} P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - \sigma^2} dx \right] - \frac{i\pi}{2i} f_-^{(1)}(-\sigma) - \frac{\pi}{2} f_+^{(1)}(+\sigma) \quad (8.1.32)$$

$$\text{où } f_-^{(1)} = \left. \frac{z e^{iz}}{z - \sigma} \right|_{z=-\sigma} = \frac{e^{-i\sigma}}{2} \quad (8.1.33)$$

$$\text{et } f_+^{(1)}(\sigma) = \left. \frac{z e^{iz}}{z + \sigma} \right|_{z=\sigma} = \frac{e^{i\sigma}}{2} \quad (8.1.34)$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{R,r}^{(1)} = \frac{1}{2i} P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - \sigma^2} dx \right] - \frac{\pi e^{-i\sigma}}{4} - \frac{\pi e^{i\sigma}}{4} \quad (8.1.35)$$

Par ailleurs, comme  $\Gamma_R^{(1)}$  contient le pôle  $z_+ = \sigma$  on aura par le théorème des Résidus :

$$I_{R,r}^{(1)} = 2\pi i \text{Res} \left[ \frac{1}{2i} \cdot \frac{z e^{iz}}{(z - \sigma)(z + \sigma)} \right]_{z=\sigma} = \frac{\pi e^{i\sigma}}{2}$$

$$\text{et } \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{R,r}^{(1)} = \frac{\pi e^{i\sigma}}{2} \quad (8.1.36)$$

De (8.1.35) et (8.1.36) on obtient :

$$\frac{\pi e^{i\sigma}}{2} = \frac{1}{2i} P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - \sigma^2} dx \right] - \frac{\pi e^{-i\sigma}}{4} - \frac{\pi e^{+i\sigma}}{4} \quad (8.1.37)$$

D'une manière analogue pour  $\Gamma_R^{(2)}$  on aura :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{R,r}^{(2)} = -\frac{1}{2i} P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-ix}}{x^2 - \sigma^2} dx \right] + \frac{\pi}{2} f_-^{(2)}(-\sigma) + \frac{\pi}{2i} f_+^{(2)}(+\sigma) \quad (8.1.38)$$

$$\text{où } f_-^{(2)}(-\sigma) = \left. \frac{z e^{-iz}}{z - \sigma} \right]_{z=-\sigma} = \frac{e^{i\sigma}}{2} \quad (8.1.39)$$

$$\text{et } f_+^{(2)}(\sigma) = \left. \frac{z e^{-iz}}{z + \sigma} \right]_{z=\sigma} = \frac{e^{-i\sigma}}{2} \quad (8.1.40)$$

alors que le théorème des Résidus (pôle  $z_- = -\sigma$ ) donne :

$$\begin{aligned} I_{R,r}^{(2)} &= -\frac{2\pi i}{2i} \text{Res} \left[ \frac{z e^{-iz}}{(z - \sigma)(z + \sigma)} \right]_{z=-\sigma} = -\pi \lim_{z \rightarrow -\sigma} \left[ \frac{z e^{-iz}}{z - \sigma} \right] = \frac{\pi}{2} e^{i\sigma} \\ &\Rightarrow \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} I_{R,r}^{(2)} = \frac{\pi}{2} e^{i\sigma} \end{aligned} \quad (8.1.41)$$

Par identification (8.1.41) et (8.1.38) donnent :

$$\frac{\pi}{2} e^{i\sigma} = -\frac{P}{2i} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-ix}}{x^2 - \sigma^2} dx \right] + \frac{\pi}{4} e^{i\sigma} + \frac{\pi}{4} e^{-i\sigma} \quad (8.1.42)$$

On additionne membre à membre (8.1.37) et (8.1.42) :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x [e^{ix} - e^{-ix}] dx}{2i(x^2 - \sigma^2)} \right] + 0 = \pi e^{i\sigma} \\ &\text{ou } \Rightarrow P \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - \sigma^2} dx \right] = \pi e^{i\sigma} \end{aligned} \quad (8.1.43)$$

**Remarque 8.3** (finale). :

On peut vérifier (exercice !!) que si les contours des demi-cercles  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  étaient choisis différemment, on aurait obtenu des résultats du type  $e^{-i\sigma}$  ou  $\sin \sigma$  et  $\cos \sigma$ , qui ne correspondraient pas à la condition physique (1b) (ou 2b).

## 2 Contour de Bromwich et Transformée de Laplace inverse

### 1 Théorème de Bromwich

Souvent l'évaluation de la transformée de Laplace (ou Fourier) inverse qui constitue la dernière étape de la résolution d'équations différentielles ou intégrales (par la méthode de la transformée de Fourier-Laplace) présente des difficultés insurmontables. Ces dernières sont dues tantôt aux divergences des fonctions originales, tantôt à la forme compliquée des fonctions transformées.

**Bromwich** a introduit une méthode intégrale (appelée aussi intégrale de Fourier-Mellin) par application des techniques d'intégration des fonctions analytiques sur un contour bien choisi dans  $\mathbb{C}$ . Cette procédure intégrale de Bromwich fournit une réponse directe à un grand nombre de ces problèmes. On la présente par la suite, avec un exemple aussi.

Soit  $L(p)$ , une fonction méromorphe de la variable  $p = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$  qui représente la transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  inconnue, à savoir :

$$\mathcal{L}^{-1}[L(p)] = f(t)$$

D'après le cours de la transf. de Laplace Ch.11, la définition de  $f(t)$  peut s'écrire un peu différemment :

$$\mathcal{L}^{-1}[L(p)] = f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{pt} L(p) dp & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (8.2.44)$$

La formule (8.2.44) s'appelle *formule de la réciprocity complexe* ou *formule de l'intégrale de Bromwich*. Le contour de Bromwich approprié est défini (v. fig. 8.7) par :

$$C_B \equiv \Gamma_R^B \cup \{\xi_0 - i\eta_0, \xi_0 + i\eta_0\}$$

On considère l'intégrale :

$$I_{C_B}^{(R)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_B} e^{pt} L(p) dp \quad (8.2.45)$$

Tenant compte des définitions (8.2.44) et (8.2.45) on écrit :

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} I_{C_B}^{(R)} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} e^{pt} L(p) dp \quad (8.2.46)$$

#### Remarque 8.4.

- L'abscisse  $\xi_0$  a été choisie de façon à **placer les pôles de  $L(p)$  à gauche du segment  $\xi = \xi_0$** . Ces pôles, d'ailleurs, doivent être d'un nombre fini.
- On peut montrer par une procédure analogue à celle utilisée pour la preuve du Lemme de Jordan, que l'intégrale sur la courbe  $\Gamma_R^{(B)}$  vérifie :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^{(B)}} e^{pt} L(p) dp = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{si } \exists \mu > 0, k > 0, t.q. \\ |L(p)| < \frac{\mu}{R^k} \end{array} \right\} \quad (8.2.47)$$

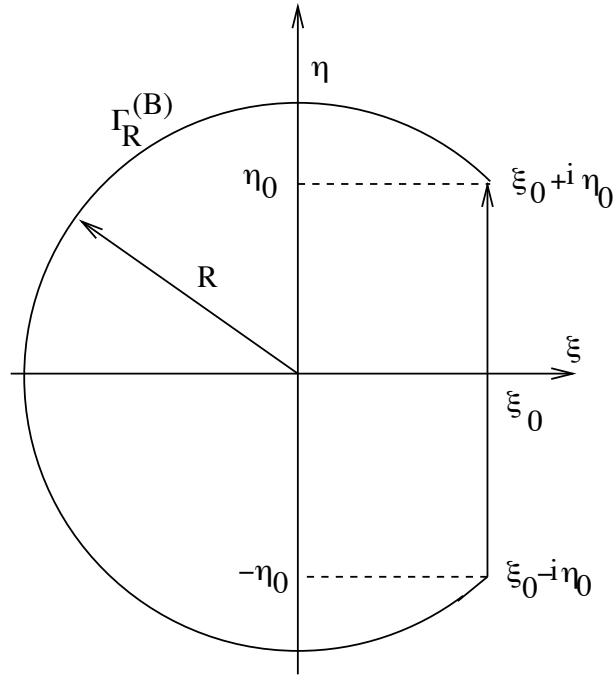


FIG. 8.7 – Plan P et contour de Bromwich

c) Par application du théorème des Résidus pour l'évaluation de  $I_{C_B}^{(R)}$  on aura :

$$I_{C_B}^{(R)} = \sum_{p_i} \text{Res}[L(p)e^{pt}]_{p=p_i} = \lim_{R \rightarrow \infty} I_{C_B}^{(R)} \quad (8.2.48)$$

Les résidus de  $L(p)e^{pt}$  doivent être pris au pôles  $p_i$  de  $L(p)$  qui se trouvent à gauche de la droite  $\{\xi_0 - i\infty, \xi_0 + i\infty\}$ . Avec l'hypothèse que  $L(p)$  vérifie la condition (8.2.47) et tenant compte des remarques a, b, c, on obtient finalement la preuve du théorème suivant :

**Théorème 8.1** (de Bromwich).

Soit  $L(p)$ , une fonction méromorphe dans  $C_{(p)}$  et t.q.  $\exists M > 0, k > 0 : \forall p \in C_B^{(R)}$  (v. fig. 8.7)

$|L(p)| < \frac{M}{R^k}$  alors la transformée de Laplace inverse  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[L(p)]$  définie par (8.2.44) est donnée par :

$$f(t) = \sum_{P_i} \text{Res}[L(p)e^{pt}]_{p=p_i} \quad (8.2.49)$$

où les résidus doivent être pris aux pôles  $p_i$  de  $L(p)$  qui se trouvent à gauche de la droite  $\{\xi_0 - i\infty, \xi_0 + i\infty\}$  avec le choix arbitraire (mais approprié d'après la remarque 8.4a)) de  $\xi$ .

**Exemple 8.4.**

On cherche à évaluer

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(p+1)(p-2)^2} \equiv L(p) \right]$$

La fonction  $L(p)$  a un pôle simple à  $p_1 = -1$  et un pôle double à  $p_2 = 2$ . Par application du théorème de Bromwich, on écrit :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(p+1)(p-2)^2} \right] = \sum_{\substack{p_1=-1 \\ p_2=2}} \text{Res} \left[ \frac{e^{pt}}{(p+1)(p-2)^2} \right]_{p_{ij}=1,2} \quad (8.2.50)$$

Sur la figure (??), on représente le contour  $C_B^{(R)}$  approprié. On a choisi  $\xi_0 = 3$ , ainsi les deux pôles  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = 2$  se trouvent à gauche du segment  $\{\xi_0 - j\eta_0, \xi_0 + j\eta_0\}$ . Calculons les résidus :

$$\text{Res} \left[ \frac{e^{pt}}{(p+1)(p-2)^2} \right]_{p=-1} = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{e^{pt}}{(p-2)^2} = \frac{e^{-t}}{9} \quad (8.2.51)$$

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[ \frac{e^{pt}}{(p+1)(p-2)^2} \right]_{p=2} &= \lim_{p \rightarrow 2} \frac{d}{dp} \left[ \frac{e^{pt}}{(p+1)} \right] = \lim_{p \rightarrow 2} \left[ \frac{te^{pt}(p+1) - e^{pt}}{(p+1)^2} \right] \\ &= \frac{3te^{2t} - e^{2t}}{9} \end{aligned} \quad (8.2.52)$$

de (8.2.51) (8.2.52), on obtient par (8.2.50) :

=> **Conclusion**

$$f(t) = \frac{e^{-t} + e^{2t}(3t - 1)}{9}$$

### 3 Stabilité des circuits amplificateurs

#### Critère de Nyquist

Pour terminer le chapitre des applications des fonctions analytiques, on présente un des critères de stabilité des circuits amplificateurs en électronique.

Considérons le système  $S_A$  d'un amplificateur avec feedback représenté sur la figure 8.8

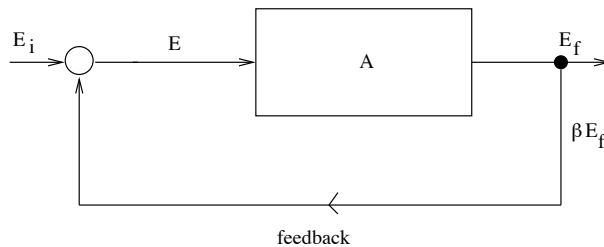


FIG. 8.8 – Circuit  $S_A$  d'un amplificateur

soit :  $E_i$ , le signal initial (entrée) et soit  $E_f$  le signal final (sortie). La boîte  $A$  représente l'amplificateur.

Une partie  $\beta E_f$  de la sortie, est réintroduite (feedback) au système pour rejoindre l'entrée  $E_i$ ;  $A$  et  $\beta$  sont en général des nombres complexes et plus précisément des fonctions complexes de la pulsation (ou fréquence)  $\alpha$  de l'entrée :  $\beta = \beta(\alpha)$ ;  $A = A(\omega)$  avec  $\omega = \text{Re}\alpha + i\text{Im}\alpha$ .

Afin que  $\alpha$  puisse correspondre à une quantité physique, on supposera toujours  $\text{Re}\alpha > 0$ .

## 1 Instabilité

D'après ces définitions et notations on peut écrire :

$$E = E_i + \beta E_f \quad (8.3.53)$$

$$E_f = AE \quad (8.3.54)$$

Par élimination de  $E$  de ces deux relations, on obtient

$$\begin{aligned} E = \frac{E_f}{A} \text{ et (8.3.53)} &\Rightarrow \frac{E_f}{A} = E_i + \beta E_f \\ \text{ou } E_f - A(\omega)\beta(\omega)E_f &= AE_i \\ \text{ou } E_f(1 - A(\omega)\beta(\omega)) &= AE_i \end{aligned} \quad (8.3.55)$$

### Condition d'instabilité

On dit que le système ( $S_A$ ) est **instable**, si on a un signal de sortie  $E_f \neq 0$  alors qu'on n'a pas du tout de signal d'entrée  $E_i = 0$ .

Cette condition d'instabilité implique par (8.3.55) qu'on doit avoir :

$$1 - A(\alpha)\beta(\alpha) = 0 \quad (8.3.56)$$

## 2 Etude des zéros

On étudie donc les zéros de la fonction :

$$f(z) = 1 - A(z)\beta(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (8.3.57)$$

a) Si  $f(z)$  a un zéro  $z_0$  sur l'axe réel positif :

$$\text{Re}z_0 > 0 \quad \text{Im}z_0 = 0$$

$\Rightarrow$  **L'instabilité croît exponentiellement.**

b) Si  $f(z)$  a un zéro complexe  $z_0 = \text{Re}z_0 + i\text{Im}z_0$  avec  $\text{Im}z_0 > 0$  alors **l'instabilité est oscillatoire.**

Par ailleurs, on sait que le nombre de zéros d'une fonction analytique est donné par (v. cours Ch.14) la formule :

$$\tilde{p} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (8.3.58)$$

où  $\Gamma$  est une courbe fermée (dans le domaine d'analyticité de  $f$ ) telle qu'elle ne contienne ni de zéros ni de pôles de  $f$ .

D'après la formule (8.3.58) on saura que  $f(z)$  a un ou plusieurs zéros dans le demi-plan  $\text{Re}z > 0$  si  $\tilde{p} \neq 0$ .

Par contre, si

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0 \quad (8.3.59)$$

$f$  n'a pas de zéros dans le demi-plan  $\text{Re}z > 0$ .

$\Rightarrow$  On a la stabilité du système  $S_A$ .

### 3 Contrôle des zéros

#### Comment on contrôle en pratique la stabilité ou l'instabilité du $S_A$

En général on utilise le contour  $\Gamma$  qui contient l'axe imaginaire et le demi-cercle  $C_R$  (avec  $R \rightarrow +\infty$ )

On pose :  $f(z) = re^{i\theta}$  **(représentation polaire)**

On aura :  $\ln f(z) = \ln r + i\theta$

et

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{d}{dz} (\ln f(z)) = \frac{d}{dr} (\ln f) \frac{dr}{dz} + \frac{d}{d\theta} (\ln f) \frac{d\theta}{dz} \\ &\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dz} + i \frac{d\theta}{dz} \end{aligned} \quad (8.3.60)$$

Par substitution de (8.3.60) dans (8.3.58) on obtient :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dr}{r} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d\theta \quad (8.3.61)$$

La première intégrale du membre de droite vaut zéro puisqu'elle donne la valeur du  $\ln r$  sur un contour fermé. La seconde intégrale donne :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d\theta = \begin{cases} \frac{2\pi}{2\pi} = 1 & \text{si } 0 \in \text{Intérieur de } \Gamma \\ 0 & \text{si } 0 \notin \text{Intérieur de } \Gamma \end{cases}$$

A savoir, suivant que l'origine appartient ou pas à l'intérieur de la courbe fermée  $\Gamma$ , on aura des zéros ou pas.

#### Conclusion

La stabilité de l'amplificateur sera assurée (resp. non assurée  $\Leftrightarrow$  instabilité) suivant que la représentation polaire de  $f(z) = 1 - A(z)\beta(z)$  exclue ou pas l'origine quand la partie imaginaire de  $z$  varie de  $-i\infty$  à  $+i\infty$ .

Si l'origine n'est pas incluse :

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} d\theta = 0 \text{ et } \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

$\Rightarrow$  On n'a pas de zéros au demi-plan des  $\text{Re } z > 0$ .

$\Rightarrow$  Le système de l'amplificateur est stable.

**C'est le critère de stabilité de Nyquist.**