

MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR
ANALYSE
I (Ch. 1 – 2)
INTEGRATION I. (A-B)

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

	ANALYSE	1
1	INTEGRATION I	
	Introduction “introductive”	
	à la théorie de la mesure -	
	A. Intégrale de Lebesgue -	
	B. Transformation de Fourier	1
1	Algèbres - Tribus - Mesures	1
1	Algèbre	1
2	Tribus	1
3	Ensembles et applications mesurables	2
4	Mesures	3
2	Intégrale de Lebesgue	5
1	Intégration d’après Lebesgue	5
2	Th. Fubini - Lebesgue - Conv.monotone et dominée	8
2	Transformée de Fourier	11
1	Motivation - Série de Fourier classique	11
2	Transformée de Fourier	12
1	Question	12
2	Intégrale de Fourier	12
3	la Transformée de Fourier	12
4	Identité de Parseval pour les intégrales de Fourier	14
5	Convolution	15
6	Transf. de Fourier à $n \geq 2$ dimensions	16

Table des figures

1.1	Pour $k = 3$ en hachuré : $\sum_{j=0}^{k2^k-1} \frac{j}{2^k} V_n \left(\left\{ x \mid \frac{j}{2^k} \leq f(x) \leq \frac{j+1}{2^k} \right\} \right)$	7
1.2	Même si $f(x)$ est continue par morceaux , l'intégrale de Lebesgue peut être définie (définition pas réalisable pour l'intégrale de Riemann).	8
2.1	graphique de f pour $a = 2$	13
2.2	graphique de $\mathcal{F}\{f(x)\}(\alpha)$ pour $a = 2$ et pour $a = 1$	14

Chapitre 1

INTEGRATION I

Introduction “introductive”

à la théorie de la mesure -

A. Intégrale de Lebesgue -

B. Transformation de Fourier

1 Algèbres - Tribus - Mesures

1 Algèbre

Définition 1.1.

Soit Ω un ensemble. Une famille $\mathcal{A}$ de sous ensembles de Ω est une **algèbre sur Ω** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- a.i) Ω et l'ensemble $\emptyset$ appartiennent à $\mathcal{A}$
- a.ii) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$ (stabilité par le passage au complémentaire)
- a.iii) Si A et $B \in \mathcal{A}$ alors $(A \cap B) \in \mathcal{A}$

Exemple d'une algèbre sur $\mathbb{R}$

Sur $\Omega = \mathbb{R}$ on définit l'algèbre $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ qui est la famille des unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ contient en plus de l'ensemble vide toutes les unions finies d'intervalles de tous types :

$$[a, b],]a, b[, [a, b[,]a, b],]-\infty, a[, [b, +\infty[,]b, +\infty[.$$

2 Tribus

Définition 1.2. Une tribu (ou σ - algèbre) sur Ω est une famille $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de Ω telle que :

- t.1 Ω et l'ensemble $\emptyset$ sont dans $\mathcal{T}$.
- t.2 Si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$

t.3 Si $A_n (n \geq 1) \in \mathcal{T}$ alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$ (stabilité par union dénombrable)

Remarque 1.1.

On déduit facilement que $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable.

Exemple 1.1.

L'ensemble $\mathcal{P}$ de toutes les parties de Ω est une tribu.

Exemple 1.2. La tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

En théorie de Probabilités, la façon la plus courante pour définir une tribu est la suivante : on sélectionne une famille $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de Ω que l'on juge intéressante (pour une raison ou une autre), et on définit la tribu $\mathcal{T}$ sur Ω comme étant la plus petite tribu contenant tous les ensembles dans $\mathcal{C}$.

Ainsi sur $\mathbb{R}$, on définit la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme étant la plus petite tribu qui contient les intervalles fermés $[a, b]$ où $-\infty < a < b < +\infty$. Avec la topologie habituelle, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu $\mathcal{D}$ engendré par l'ensemble $\mathcal{D}$ des demi-droites $] -\infty, \alpha[$ ou $] -\infty, \alpha]$ ou par l'ensemble des intervalles.

3 Ensembles et applications mesurables

- a) Si, sur un ensemble Ω , on définit une tribu $\mathcal{T}$ alors on dit que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace mesurable et les parties de Ω sont des ensembles mesurables de Ω si elles appartiennent à $\mathcal{T}$.
- b) Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et Y un espace topologique. On dit qu'une application $f : \Omega \rightarrow Y$ est mesurable si l'image réciproque par f de tout ouvert $A \in \mathcal{O}_Y$ de Y (où $\mathcal{O}_Y \equiv$ la famille des ouverts de Y) est un ensemble mesurable :

$$\text{i.e : si } A \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$$

Exemple 1.3. : Soit un ensemble Ω

1.3.1 Reprenons l'exemple de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}$ l'ensemble des parties de Ω (ex. 1.2.a.). Etant donné un espace topologique Y , toute fonction $f : \Omega \rightarrow Y$ est une fonction mesurable.

1.3.2 On considère la fonction numérique, $\forall P \in \mathcal{P}(\Omega), x_p : P \rightarrow \mathbb{R}$

$$x_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P \\ 0 & \text{si } x \notin P \end{cases}$$

appelée **fonction caractéristique** (ou indicatrice) de la partie $P \subset \Omega$. C'est une fonction mesurable ssi P est une **partie mesurable** de Ω .

1.3.3 Généralisation de la tribu de Borel - Application Borélienne

L'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts d'un espace topologique Ω quelconque n'est pas toujours une tribu. C'est ainsi qu'on considère souvent la tribu $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{O}}$ (engendrée par $\mathcal{O}$) qu'on appelle tribu de Borel. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés **ensembles de Borel** ou **Boréliens** de Ω . Toute fonction (ou application) mesurable pour la tribu $\mathcal{B}$ est appelée fonction (ou application) borélienne. En particulier une fonction continue est borélienne.

Remarque 1.2.

On vérifie (comme pour $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) que les **tribus de Borel** de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ etc... peuvent être engendrées par l'ensemble des **rectangles**, **parallélépipèdes** etc... à côtés parallèles aux axes.

Propriétés des fonctions mesurables

On donne l'énoncé (sans démonstration) des théorèmes suivants :

Théorème 1.1. (opérations)

- i) Soient X, Y, Z trois espaces mesurables et soient f et g deux applications mesurables de X dans Y et de Y dans Z :

$$\Rightarrow \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

L'application **composée** $g \circ f : X \rightarrow Z$ est **mesurable**.

- ii) Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, u et v deux fonctions numériques mesurables.

$$\Rightarrow \quad \left. \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & (u(x), v(x)) \end{array} \right\} \text{ est mesurable}$$

(où $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ est muni de la topologie habituelle)

Théorème 1.2. (Passage à la limite)

Soit $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ une suite de fonctions numériques mesurables définies sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$, et convergente ponctuellement vers la fonction f ;
 $\Rightarrow$ la fonction f est aussi mesurable sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Ce dernier résultat est très utile à la **théorie de l'intégration**.

4 Mesures

On utilise la notation $\bar{\mathbb{R}}$ pour la droite "achevée" $[-\infty, +\infty]$ et $\bar{\mathbb{R}}^+$ pour la demi-droite "achevée" $[0, +\infty]$.

Définition 1.3.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On dit que la fonction :

$$\mu : \mathcal{T} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$$

est une **mesure positive** (ou simplement **mesure**) si :

- (non trivialité) $\forall A \in \mathcal{T} \quad \mu(A) \text{ n'est pas toujours égale à } +\infty$
- Soit $I \subset \mathbb{N}$. Pour toute famille dénombrable $\{A_i\}_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, $(A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j)$ on a :

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\text{fonction dénombrablement additive})$$

Remarque 1.3.

- Si Ω est un espace topologique et si $\mathcal{T}$ est la tribu de Borel $\mathcal{B}$, alors une mesure sur $\mathcal{B}$ est appelée **mesure borélienne**.
- Si $\mu(\Omega)$ est fini on dit que la mesure positive μ est **bornée**.

- c) Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un **espace mesuré**.
 d) Les séries intervenant dans l'additivité dénombrable doivent être **absolument convergentes**.
 e) On démontre facilement que les mesures satisfont les propriétés :

Proposition 1.1. Propriétés d'une mesure

Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable ; on définit sur $\mathcal{F}$ une mesure μ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

a)

$$\mu(\emptyset) = 0$$

b)

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

(où A_i ensemble **mesurable** $\forall i$ et t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$)

c)

$$\text{Si } A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

d) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \quad (A_i \in \mathcal{F} \forall i \Leftrightarrow \text{ensembles mesurables})$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad (\text{continuité par union croissante})$$

e) Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n$ et $\mu(A_1) < \infty$

$(A_i \in \mathcal{F} \forall i \Leftrightarrow \text{ensembles mesurables})$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad (\text{continuité par intersection décroissante})$$

Exemple 1.4. (Exemples de mesures)

4.1 Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et soit $A \in \mathcal{T}, a \in \Omega$.

L'application $\delta_a : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

définit une mesure qu'on appelle **mesure de Dirac de masse 1 concentrée au point a** .

4.2 Soit encore $(\Omega, \mathcal{T})$ on appelle mesure dénombrante sur Ω l'application $N : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$A \mapsto N(A) = \text{nombre d'éléments de } A$

($N(A)$ définit bien une mesure).

4.3 **Mesure de Borel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^k$ (ou mesure de Lebesgue)**

Dans $\mathbb{R}$ on définit la longueur $\ell(I)$ d'un intervalle par

$$\ell([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha, \quad \ell(]-\infty, \alpha]) = +\infty, \quad \ell([\alpha, +\infty[) = +\infty$$

et si A est une **réunion finie** d'intervalles disjoints, on définit la longueur $\ell(A)$ de A comme la somme des longueurs des intervalles composants A .

D'après un théorème fondamental (qu'on ne présente pas ici) on peut étendre ℓ à l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ et définir de **manière unique** la longueur d'un **borélien de $\mathbb{R}$** .

De la même façon, on définit l'aire d'un borélien de $\mathbb{R}^2$, volume d'un borélien de $\mathbb{R}^3$ etc. . .

On appelle la mesure Borélienne ainsi définie : *mesure de Borel* sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. . . (ou *mesure de Lebesgue*).

Ensembles de mesure nulle

Définition 1.4.

- a) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une partie X de Ω est de mesure nulle (par rapport à μ) s'il existe un ensemble mesurable A contenant X et de mesure $\mu(A) = 0$.
On vérifie qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle.
- b) On dit qu'une propriété P associée à chaque point de Ω est **vraie presque partout** si elle est vraie en chaque point du **complémentaire** d'un ensemble **de mesure nulle**.
- c) Si f et g sont deux fonctions définies sur Ω on dit que :
 $f = g$ **presque partout**
si l'ensemble N d'éléments x t.q. $f(x) \neq g(x)$ est de mesure nulle.

2 Intégrale de Lebesgue

1 Intégration d'après Lebesgue

L'intégrale de Riemann qu'on a déjà tous vue et appliquée dans les problèmes de Physique et Mathématiques, peut être aussi utilisée dans des cadres de Maths. appliquées plus exigeants comme c'est le cas de la théorie des Probabilités.

Mais, malheureusement, très souvent on se heurte à des difficultés techniques insurmontables du type par exemple :

Convergence de certaines intégrales ayant comme bornes des **points "mal définis"** **pour l'intégrand** (ex : $-\infty, +\infty$) ou encore l'intégrale même **au sens de Riemann est mal définie ou elle ne peut pas être définie**.

C'est justement le rôle bénéfique de la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue : d'une part, elle ne fait que des hypothèses "inoffensives" sur les intégrands et les domaines de l'intégration, d'autre part, elle constitue le cadre mathématique adéquat de la théorie des Probabilités que vous allez étudier et appliquer prochainement.

Cette section vient à la suite de celle appelé "Introduction introductive de la théorie de la mesure", et qui avait comme but de vous familiariser avec les mots comme : "tribu", "mesure", "fonction mesurable".

Maintenant ce sont les termes "Intégrale de Lebesgue", "fonction intégrable", "Intégrale et transformée de Fourier", "Convolution" qui seront présentés ainsi que certains résultats fondamentaux qui seront plus tard un outil indispensable à vos applications.

La première partie est un exposé (sans prétention de grande précision et sans trop de démonstrations !) de **l'Intégrale de Lebesgue** et de quelques propriétés fondamentales associées, comme les théorèmes de Lebesgue et de Fubini.

Dans la deuxième partie et comme première application du cadre général de l'intégrale de Lebesgue, on introduit la **transformée de Fourier**.

C'est "l'extension continue" de la série Fourier classique qu'on a abordée en premier cycle et qu'on aurait pu utiliser dans nos études précédentes concernant les applications de l'orthogonalité et des bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens. On introduit aussi les diverses représentations équivalentes en intégrales de Fourier, l'identité de Parseval (dans ce nouveau cadre) ainsi que la notion de convolution et sa principale propriété.

Dans ce paragraphe on va considérer que des ensembles mesurables et des fonctions mesurables. L'espace mesuré Ω sera $\mathbb{R}^n$ avec la mesure de Lebesgue correspondante.

Définition 1.5. (*l'intégrale de Lebesgue*)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique mesurable non négative, on définit l'intégrale de Lebesgue de f notée :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \text{ ou } \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

par :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{k2^k-1} \frac{j}{2^k} \cdot V_n \left(\left\{ x \mid \frac{j}{2^k} \leq f(x) \leq \frac{j+1}{2^k} \right\} \right)$$

où $V_n(A)$ est le n -volume d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$.

Pour $n = 1$ et $k = 3$, on donne les figures suivantes¹ 1.1 et 1.2 (pour une meilleure concrétisation de cette définition).

¹Référence : **P. Brémaud** : "Introduction au Probabilité - Modélisation des phénomènes aléatoires" (Springer - Verlag)

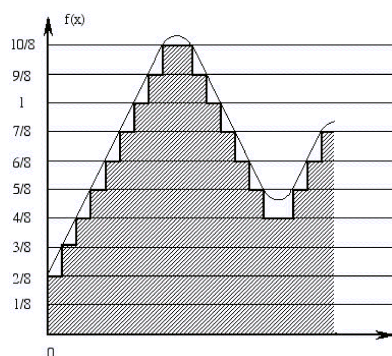


FIG. 1.1 – Pour $k = 3$ en hachuré : $\sum_{j=0}^{k2^k-1} \frac{j}{2^k} V_n \left(\left\{ x \mid \frac{j}{2^k} \leq f(x) \leq \frac{j+1}{2^k} \right\} \right)$

Remarque 1.4.

- a) Comme pour l'intégrale de Riemann, on approxime l'intégrale de Lebesgue par en-dessous par des sommes inférieures, mais il y a une différence fondamentale : Pour l'intégrale de Riemann on découpeait l'axe des x alors que pour l'intégrale de Lebesgue, on découpe l'axe des y .

Quand la fonction est continue et l'intégrale de Riemann a un sens, alors les deux intégrales s'identifient.

- b) L'intégrale de Lebesgue satisfait aussi à toutes les propriétés de linéarité et de monotonie (comme celle de Riemann).

Définition 1.6.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue ssi :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$$

On appelle L^1 l'espace de fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

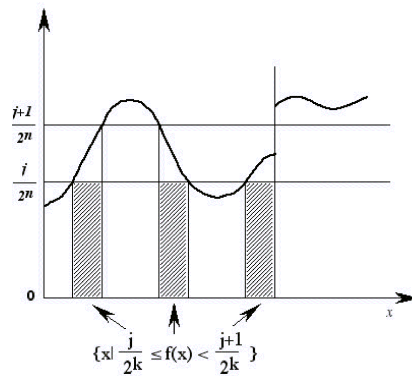


FIG. 1.2 – Même si $f(x)$ est continue **par morceaux**, l'intégrale de Lebesgue peut être définie (définition pas réalisable pour l'intégrale de Riemann).

Plus généralement pour $1 \leq p < \infty$, on appelle L^p l'espace de fonctions p intégrables au sens de Lebesgue :

$$\text{i.e. telles que : } \int_{R^n} |f|^p dx < \infty$$

avec la norme associée :

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

L^p est un espace de Banach ($\forall 1 \leq p < \infty$)
(v. cours de Topologie Ch. 5).

2 Th. Fubini - Lebesgue - Conv.monotone et dominée

Présentons, pour finir ce paragraphe, deux (parmi le nombre important) des théorèmes fondamentaux concernant l'intégrale de Lebesgue.

Le premier est le théorème de **Fubini**, très connu pour la richesse de ses applications. Il énonce que, si $n = \ell + m$ où ℓ et m sont deux entiers strictement positifs et si f est une fonction intégrable de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors on peut d'abord intégrer sur les ℓ - premières coordonnées $x_1, \dots, x_\ell$ en bloquant les $m = n - \ell$ dernières pour obtenir une fonction mesurable $g : \mathbb{R}^{n-\ell} \rightarrow \mathbb{R}$, dont l'intégrale est égale à l'intégrale de f ; autrement dit :

Théorème 1.3. (Fubini)

Si l'intégrale

$$g(x_{\ell+1}, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_\ell; x_{\ell+1}, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_\ell$$

existe (au sens de Lebesgue)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_{\ell+1}, \dots, x_n) dx_{\ell+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{m = n - \ell}$$

Les théorèmes suivants qu'on présente, (également sans démonstration), connus sous le nom, l'un du "Théorème de Lebesgue" ou de la "**Convergence monotone**", et l'autre du "Théorème de Lebesgue ou de la "**Convergence dominée**", assurent la possibilité de l'interversion de la limite avec le signe d'intégration.

Ils sont très utiles en **théorie des probabilités** et en particulier à la définition des fonctions de répartition en termes des densités de probabilités.

Théorème 1.4. (Lebesgue - Convergence Monotone)

Soit $\{f_n\}_{n=1,2}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ telle que pour tout élément $x \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$$

$\Rightarrow$ la fonction f définie par $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ est mesurable et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n dx = \int_E f dx$$

pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.5. (Lebesgue - Convergence Dominée)

Soit $\{f_n\}_{n=1,2}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$ et convergeant ponctuellement vers une fonction f et majorées par une fonction g intégrable :

$$|f_n| \leq g \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow$ la fonction f est intégrable et pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ on a :

$$\int_E f dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n dx$$

Chapitre 2

Transformée de Fourier

1 Motivation - Série de Fourier classique

Considérons l'espace Euclidien L^2 , muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

qu'on aurait pu déjà rencontré (chap. de l'orthogonalité dans les espaces préhilbertiens) comme exemple particulièrement utile à cause du choix très riche de ses bases orthonormales. En particulier, on peut démontrer (faites le en exercice) que la famille des fonctions :

$$\left\{ \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2L}}; \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi x}{L}; \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{\pi x}{L}; \dots; \phi_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}; \right. \\ \left. \phi_{2n} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}; \dots \right\}$$

est une base orthonormale pour L^2 .

En plus, démontre facilement que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x)$ (*Série Fourier*) converge uniformément vers $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x) \quad (2.1.1)$$

(où $f(x) \in L^2$ etc $\dots 2L$ périodique⁽¹⁾) alors les coefficients Fourier C_n (v. cours à venir) sont donnés en termes du produit scalaire dans L^2 par :

$$C_n = \int_{-L}^L f(x) \phi_n(x) dx \quad (2.1.2)$$

L'égalité 2.1.1 représente précisément le **développement en série de Fourier classique** où le système $\{\phi_n\}$ est justement l'ensemble de fonctions $2L$ périodiques cosinus et sinus.

¹ une fonction $\phi(x)$ est dite $2L$ périodique ssi $\phi(x) = \phi(x + 2L)$

2 Transformée de Fourier

1 Question

La question qu'on peut se poser immédiatement est alors :

que se passe-t-il quand $L \rightarrow +\infty$? C'est de cette façon justement qu'on arrive à la définition de l'**intégrale de Fourier** et de la **transformée de Fourier**.

On se place, dans tout ce qui suit, dans l'espace L^2 (v. section précédente du cours) où toutes les intégrales sont finies au sens de Lebesgue.

On présente sans démonstration le résultat suivant :

2 Intégrale de Fourier

Théorème 2.1. Supposons que $f, f' \in L^2$ alors les deux représentations intégrales i) et ii) pour $f(x)$ sont valables et sont équivalentes

i)

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x\} d\alpha \quad (2.2.3)$$

avec

$$\begin{cases} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx \\ B(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx \end{cases} \quad (2.2.4)$$

ii)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (2.2.5)$$

avec

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du \quad (2.2.6)$$

3 la Transformée de Fourier

Définition 2.1.

i) La fonction $F(\alpha)$ de la formule 2.2.6 est appelée la "**transformée de Fourier de f** " et quelquefois on écrit :

$$F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$$

La fonction $f(x)$ est appelée la "transformée de Fourier inverse de $F(\alpha)$ " et on écrit :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\}$$

ii) Notons que les constantes 1 et $\frac{1}{2\pi}$ devant les signes d'intégration du th. 2.1. pourraient être remplacées par n'importe quel autre couple de constantes ayant comme produit $\frac{1}{2\pi}$; c'est une question de choix qu'on fait.

iii) Etant donné que $f \in L^2$ le théorème de Fourier est aussi valable pour les fonctions **continues par morceaux**. Si x est un point de discontinuité, on remplace alors $f(x)$ par la demi-somme des limites à droite et à gauche :

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

iv) On définit la **transformée de Fourier en sinus** pour tout $f \in L^2$:
avec :

$$F_s(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx \quad (2.2.7)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha \quad (2.2.8)$$

alors $f(x)$ est dite transformée de Fourier inverse en sinus de $F_s(\alpha)$.

Si $f(x)$ est une fonction **impaire** on a identification de la transformée de Fourier de f et de sa transformée en sinus.

De même, on définit la **transformée de Fourier en cosinus** $F_c(\alpha)$ pour tout $f \in L^2$:

$$F_c(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx \quad (2.2.9)$$

avec :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \quad (2.2.10)$$

Alors $f(x)$ est dite la **transformée de Fourier inverse en cosinus** de $F_c(\alpha)$.

Si $f(x)$ est une fonction **paire** on a identification de la transformée de Fourier de f et de sa transformée en cosinus.

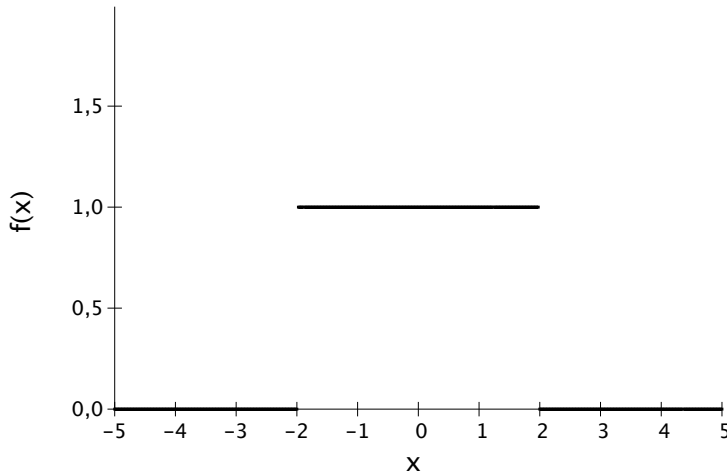
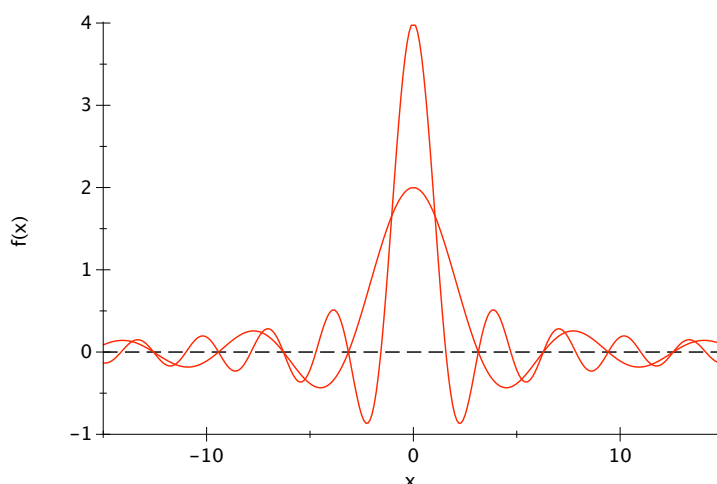


FIG. 2.1 – graphique de f pour $a = 2$

FIG. 2.2 – graphique de $\mathcal{F}\{f(x)\}(\alpha)$ pour $a = 2$ et pour $a = 1$

Exemple 2.1 (Exemple important de la transformée de Fourier). Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$

On cherche la transformée de Fourier de $f(x)$. On donne les représentations graphiques de $f(x)$ pour $a = 2$ et $\mathcal{F}\{f(x)\}$ pour $a = 2$ (et $a = 1$). (v.fig.2.1, 2.2)

$$\text{On a } \mathcal{F}\{f\} \equiv F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\alpha u} du = \int_{-a}^a e^{-i\alpha u} du = \left[\frac{e^{-i\alpha u}}{-i\alpha} \right]_{-a}^a$$

$$\Rightarrow F(\alpha) = \frac{e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a}}{i\alpha} = 2 \frac{\sin \alpha a}{\alpha} \quad \alpha \neq 0 \quad (2.2.11)$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient :

$$F(0) = 2a \quad (2.2.12)$$

4 Identité de Parseval pour les intégrales de Fourier

Dans un de vos cours (passés) vous avez (peut-être) déjà vu l'identité de Parseval pour les coefficients de Fourier C_n par rapport à une base orthonormale dans un espace de Hilbert. (Préhilbertien complet v. cours précédent de Topologie).

Rappel :

$$\sum_{k \in I} C_k^2 = \|x\|^2$$

Vous avez alors pu remarqué le rôle symétrique des fonctions dans l'espace L_2 , et de leurs coefficients de Fourier associés, dans l'espace dual L_2^* des fonctionnelles linéaires définies par $C_n = \langle f, \nu_n \rangle \forall \nu_n \in \mathcal{V}$ (base orthonormale).

D'une manière analogue, l'espace L_2^* des transformées de Fourier $F(\alpha)$ est caractérisé par des propriétés "symétriques" ou de dualité qui vont être mises en évidence par les résultats suivants :

Définition 2.2. On introduit dans L^2 le **produit scalaire** :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x) dx \quad (2.2.13)$$

(Intégration définie au sens de Lebesgue)

On peut vérifier le théorème suivant :

Théorème 2.2 (Identité de Parseval). Soit $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$ les transformées de Fourier de $f, g \in L^2$

$$\Rightarrow \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \overline{G(\alpha)} d\alpha = \langle F, G \rangle \quad (2.2.14)$$

$\mathbb{R}$ $\overline{G(\alpha)}$ compl. conjuguée de $G(\alpha)$ - cas général. Dans le cas le plus intéressant de $\overline{G(\alpha)} = G(\alpha)$

Dans le cas spécial où $f(x) = g(x) \Rightarrow$

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha = \|F\|^2 \quad (2.2.15)$$

5 Convolution

Voici finalement la loi de composition interne dans L^2 appelée **Convolution**.

Définition 2.3.

Soient $f, g \in L^2$; on appelle **convolution** de f et g notée $f * g$ la fonction :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x - u) du \quad (2.2.16)$$

Théorème 2.3 (Propriétés de la convolution). Soient $f, g, h \in L^2$ alors :

$$f * g = g * f \quad (\text{commutativité})$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (\text{associativité})$$

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \quad (\text{distributivité})$$

Mais, la propriété essentielle de la convolution est que : **la transformée de Fourier de la convolution** de deux fonctions est **le produit des transformées de Fourier respectives**, donnée par le

Théorème 2.4 (de la Transformée de Fourier de la convolution). Soient $\mathcal{F}\{f\}$, et $\mathcal{F}\{g\}$ les transformées de Fourier respectives de $f, g \in L^2$ alors :

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{g\} \quad (2.2.17)$$

6 Transf. de Fourier à $n \geq 2$ dimensions

Finissons ce chapitre par la généralisation de la notion de la transformée de Fourier à plusieurs dimensions, notion très utile pour la physique.

Définition 2.4.

Soit : $f \in \mathcal{L}_2$ définie sur l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire Euclidien ordinaire et soient $x, k \in \mathbb{R}^n$, alors on définit la transformée de Fourier de f par :

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (2.2.18)$$

Bibliographie

- [1] G. ARFKEN, “*Mathematical Methods for Physicists*”(Academic Press)
- [2] J. BASS, “*Cours de Mathématiques*” (Masson)
- [3] P. BRÉMAUD, “*Introduction aux Probabilités - Modélisation des phénomènes aléatoires*” (Springer - Verlag)
- [4] G. CHOQUET, “*Cours d’Analyse*” Tome II Topologie (Masson)
- [5] R.COURANT -D.HILBERT “*Methods of Mathematical.Physics*” (Inerscience,Publishers)
- [6] P. DENNERY - A. KRZYWINSKI, “*Mathematics for Physicists*” (Harper-Internat. Editions et “Dover” Publ.)
- [7] J. DIEUDONNE “*Foundations of Modern Analysis*” (Academic Press N.York)
- [8] B. FRIEDMAN“ *Principles and Techniques of Applied Mathematics*” (J.Wiley and Sons)
- [9] A.GUICHARDET , “*Intégration-Analyse Hilbertienne*” (X- Polytechnique- Ellipses)
- [10] W.RUDIN
 - a) W. RUDIN, “*Analyse réelle et complexe*” (Masson)
 - b) W. RUDIN, “*Principles of Mathematical Analysis*” (McGraw-Hill)
- [11] *Séries SCHAUM’S* (McGraw Hill)
- [12] L.SCHWARTZ
 - a)“*Cours d’Analyse (I, II)*” (Hermann)
 - b)“*Cours de Méthodes Mathématiques pour la Physique*” (Hermann)
 - a)“*Théorie de Distributions*” (Hermann)
- [13] A.J.WEIR, “*Lebesgues-Integration and Measure*” (Cambridge Univ.Press)