

MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR
ANALYSE
I (Ch. 5 – 6)
INTEGRATION IV. (E)

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

	ANALYSE	1
5	Introduction	
	aux fonctions analytiques	
	I	
	Conditions de Cauchy-Riemann	
	Théorème- Intégrale de Cauchy	1
1	Analyticité	1
1	1 Introduction	1
2	2 Analyticité	2
3	3 Critères d'analyticité-Conditions de Cauchy-Riemann	4
2	2 Théorème de Cauchy	6
3	3 Formule de l'intégrale de Cauchy	8
6	Introduction	
	aux fonctions analytiques	
	II .	11
1	Séries de Taylor et séries de Laurent	11
1	1 Séries entières	11
2	2 Séries de Laurent	14

Table des figures

5.1	Ω Domaine d'holomorphic.	3
5.2	Définition de l'intégrale sur la courbe $\mathcal{C}$	6
5.3	Contour fermé $\mathcal{C}$ dans le domaine Ω	7
5.4	Pour la preuve : le contour $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup L_1 \cup \mathcal{C}_0 \cup L_2$	8
6.1	Le disque D , domaine d'analyticité, de centre z_0	12
6.2	domaine Ω hachuré , couronne S	14
6.3	Le contour fermé $\Gamma_1 \cup \gamma \cup \Gamma_2$	15

Chapitre 5

Introduction aux fonctions analytiques

I Conditions de Cauchy-Riemann Théorème- Intégrale de Cauchy

1 Analyticité

1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit les principales propriétés et applications des fonctions d'une variable complexe et en particulier des *fonctions analytiques*. Ce sujet est d'une importance fondamentale non seulement pour son rôle primordial en analyse mathématique pure, mais aussi (et surtout) pour le nombre important d'outils essentiels qu'il fournit en physique et toutes les sciences techniques. Voici quelques domaines d'applications intéressantes des fonctions analytiques pour les sciences de l'ingénieur.

i. L'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (5.1.1)$$

Ici ψ peut représenter le potentiel électrostatique et la fonction “conjuguée” u qui fournit les courbes orthogonales $u=const.$ à celles de $\psi = const.$, peut représenter le champ électrique $\vec{E}$ (cf. les fonctions harmoniques). On retrouve une situation analogue d'un potentiel et d'un champ en hydrodynamique d'un fluide idéal en mouvement irrotationnel.

ii. La solution d'une équation différentielle (d'ordre deux) est souvent représentée sous forme d'une série entière convergente. Il s'agit d'une fonction analytique qui peut être prolongée analytiquement dans tout son “domaine d'analyticité” et donc, fournir une solution du problème dans toute cette région.

iii. A l'aide des intégrales dans $\mathbb{C}$ on a la possibilité de :

- a. Evaluer des intégrales définies,
- b. Inverser des séries entières,
- c. Définir des produits infinis,
- d. Obtenir asymptotiquement des solutions des équations différentielles,
- e. Etudier la stabilité des systèmes en oscillations (signaux-systèmes).

2 Analyticité

Définition 5.1.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

On définit la dérivée d'une fonction d'une variable complexe $f : z \rightarrow f(z)$ par :

$$f'(z) \equiv \frac{df}{dz} \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (5.1.2)$$

Cette limite peut être obtenue par une infinité de directions. Le résultat dépend en général du chemin qu'on a suivi indépendamment pour $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta y \rightarrow 0$.

Définition 5.2.

On dit qu'une fonction $f : z \rightarrow f(z)$ est **différentiable** ou **dérivable** en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, si la limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \equiv f'(z_0) \quad (5.1.3)$$

existe et ne dépend pas du chemin suivi pour s'approcher du point z_0 .

Exemple 5.1.

Soit $f(z) = x + 2iy$.

Calculons la dérivée de f en $z = 0$.

Par définition :

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + 2iy}{x + iy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + 2y^2 + ixy}{x^2 + y^2}$$

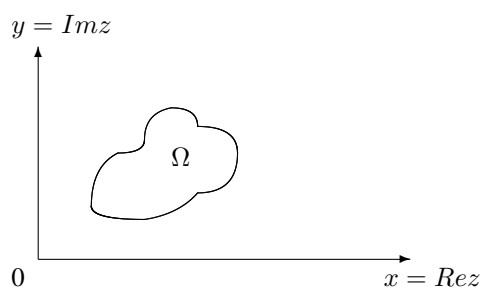
Si on garde x constant et $y \rightarrow 0 \Rightarrow \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = 1$ alors que,

si on garde y constant et $x \rightarrow 0 \Rightarrow \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = 2$.

Si encore on fait tendre $\begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$ sur une ligne $y = ax$

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \frac{1 + 2\alpha^2 + i\alpha}{1 + \alpha^2} \text{ donc la valeur de la limite dépend de } \alpha = \arg z$$

Conclusion : $f(z)$ n'est pas différentiable en $z_0 = 0$

FIG. 5.1 – Ω Domaine d'holomorphie.**Remarque 5.1.**

Toutes les règles de dérivation connues pour $x \in \mathbb{R}$, peuvent être établies facilement, pour les dérivées de toute fonction de $z \in \mathbb{C}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz}(f \pm g) = \frac{df}{dz} \pm \frac{dg}{dz} \\ \frac{d}{dz}(f \cdot g) = \frac{df}{dz}g + f\frac{dg}{dz} \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{f}{g}\right) = \left[\frac{df}{dz}g - f\frac{dg}{dz}\right]g^{-2} \\ \frac{d}{dz}(f(g(z))) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz} \end{array} \right.$$

Définition 5.3.

On considère un domaine dans $\mathbb{C}$ (c'est à dire un ouvert $\Omega \neq \emptyset$ du plan complexe $\mathbb{C}$ tel que il n'est pas l'union de deux ouverts $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ disjoints $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$)

On dira que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $z \mapsto f(z)$ est **analytique** ou **holomorphe** dans Ω si $\forall z_0 \in \Omega$ la dérivée $f'(z_0)$ existe (au sens de la définition 5.2).

On note par $H(\Omega)$ la classe de toutes les fonctions holomorphes (ou analytiques) dans Ω , qui est appelé **domaine d'holomorphie** ou **d'analyticité** de la fonction f .

Remarque 5.2.

- a. Pour $n = 1, 2, \dots$ $f(z) = z^n$ est une fonction holomorphe dans tout le plan $\mathbb{C}$.
- b. $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- c. Si $f_1, f_2 \in H(\Omega)$ et f_2 différente de zéro dans Ω alors $\frac{f_1}{f_2} \in H(\Omega)$.
- d. la fonction $f(z) = z^*$ n'est pas analytique ; (Pourquoi ?)

3 Critères d'analyticité-Conditions de Cauchy-Riemann

Voici le premier théorème qui établit un critère d'analyticité d'une fonction.

Théorème 5.1 (Conditions de Cauchy-Riemann).

Soit f une fonction définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ les parties réelles et imaginaires de $f : f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qui possèdent des dérivées partielles premières par rapport à x et y continues ($\forall z \in \Omega$).

$\Rightarrow$

f est analytique dans $\Omega \subset \mathbb{C}$ ssi les conditions suivantes, dites "conditions de Cauchy-Riemann", sont vérifiées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

Preuve

a. Nécessaire D'après la définition 5.2 on écrit :

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}\tag{5.1.5}$$

D'après l'hypothèse $\frac{df}{dz}$ existe, donc les limites ont un sens * (et il n'y a **aucune dépendance de l'ordre**). On pose $\Delta y = 0$ et on prend la limite $\Delta x \rightarrow 0$ De 5.1.5

$$\Rightarrow \frac{df}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\tag{5.1.6}$$

Ensuite on prend $\Delta y \rightarrow 0$ en posant $\Delta x = 0$. De 5.1.5

$$\Rightarrow \frac{df}{dz} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}\tag{5.1.7}$$

* Bien sûr, on a considéré un cas particulier, mais le même résultat serait valable si à la place des droites $x = \text{const.}$ ou $y = \text{const.}$ on avait pris n'importe quelle courbe sur $\mathbb{C}$ pour faire varier x et y .

En imposant l'égalité des parties réelles et imaginaires des seconds membres de 5.1.6 et 5.1.7 on obtient les conditions de Cauchy-Riemann.

b. Suffisant On montre que si les conditions de Cauchy-Riemann (5.1.4) sont vérifiées et les dérivées partielles sont **continues**, la dérivée $\frac{df}{dz}$ existe.

On considère une petite variation finie de $z \in \mathbb{C}$: $\delta z = \delta x + i\delta y$ alors :

$$\delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y$$

ou

$$\delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta z - i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta y - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta z + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta x\tag{5.1.8}$$

Tenant compte des conditions Cauchy-Riemann (5.1.4) et en combinant le 1^{er} terme (resp. le 2^{me}) de la dernière equation avec le 3^{me} (resp. avec le 4^{me}) on obtient :

$$\delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta z \quad (5.1.9)$$

En divisant par $\delta z > 0$ et en prenant la limite :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.1.10)$$

Le résultat 5.1.10 montre que la dérivée $\frac{df}{dz}$ est **indépendante de la direction de l'approche à la limite puisque les dérivées partielles sont continues.**

C.Q.F.D.

Remarque 5.3.

a. Les conditions Cauchy-Riemann assurent l'orthogonalité des surfaces

$$\begin{aligned} x &= \text{const} \\ y &= \text{const} \end{aligned}$$

et si on prend les dérivées secondes on montre que :

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ \Delta v &= 0 \end{aligned} \right\}$$

C'est à dire les fonctions u et v vérifient l'équation de Laplace.

b. On appelle en général harmoniques les fonctions :

$$h : \begin{aligned} &\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \\ &(x_1, x_2, \dots, x_N) \rightarrow h(x_1, \dots, x_N) \end{aligned}$$

de N variables qui vérifient l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^N$:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} = 0 \quad (5.1.11)$$

Donc, les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique sont des fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^2$.

c. Attention

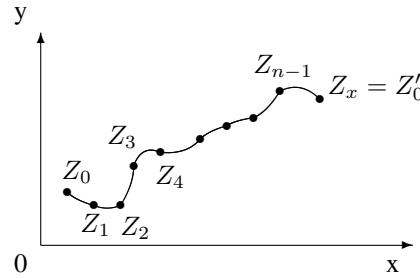
Une paire de fonctions harmoniques $u(x, y)$, $v(x, y)$ **ne définissent toujours pas une fonction analytique.**

cf exemple 5.1 $f(z) = x + 2iy$ $u(x, y) = x$ $v(x, y) = 2y$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

mais f n'est pas différentiable en $z_0 = 0$ donc pas analytique.

d. L'analyticité d'une fonction en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ implique **régularité** de la fonction **en tout voisinage** de z_0 et existence des dérivées de tout ordre alors que la différentiabilité de la fonction d'une variable réelle en x_0 est une propriété purement locale.

FIG. 5.2 – Définition de l'intégrale sur la courbe $\mathcal{C}$

2 Théorème de Cauchy

On peut définir l'intégrale d'une fonction f par rapport à une variable complexe $z \in \mathbb{C}$ sur un contour $\mathcal{C}$, par analogie à l'intégrale de Riemann. On divise la courbe $\mathcal{C}$ en n intervalles en prenant $n - 1$ points intermédiaires.

On considère la somme :

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(Z_j - Z_{j-1}) \quad (5.2.12)$$

avec ζ_j un point sur $\mathcal{C}$ entre Z_j et Z_{j-1} .

Quand $n \rightarrow \infty$ et $\forall j, |Z_j - Z_{j-1}| \rightarrow 0$.

Si la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe, on définit alors l'intégrale sur le contour $\mathcal{C}$ de f , par :

$$I_c = \int_{Z_0}^{Z'_0} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(Z_j - Z_{j-1}) \quad (5.2.13)$$

On présente maintenant le théorème fondamental dit **de Cauchy** :

Théorème 5.2 (Théorème de Cauchy).

Soit $f(z) \in H(\Omega)$ et soit $\mathcal{C}$ un contour fermé dans le domaine Ω , alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$$

Preuve

Soit $f(z) \in H(\Omega)$ et $\mathcal{C} \subset \Omega$ avec $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

On écrit :

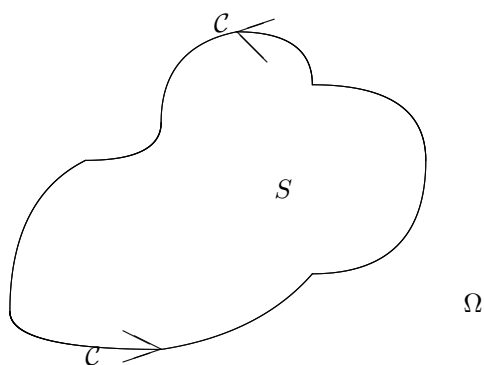
$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}} (u + iv)(dx + idy) = \oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) + i \oint_{\mathcal{C}} (vdx + udy) \quad (5.2.14)$$

Par le théorème de Stokes et en posant $\vec{V} = (V_x = u ; V_y = -v ; 0)$ on a :

$$\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) \quad (5.2.15)$$

(où S la surface limitée par $\mathcal{C}$) ou

$$\int_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) \quad (5.2.16)$$

FIG. 5.3 – Contour fermé $\mathcal{C}$ dans le domaine Ω .

ou

$$-\int_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) \quad (5.2.17)$$

mais comme la fonction $f(z)$ est analytique sur S les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées : $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, donc finalement (5.2.17) donne :

$$\oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) = 0 \quad (5.2.18)$$

D'une manière analogue en définissant : $\vec{V}' = (V'_x = v ; V'_y = u)$ on a par le théorème de Stokes

$$\int_S \left(\frac{\partial V'_y}{\partial x} - \frac{\partial V'_x}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}} (vdx + udy) \quad (5.2.19)$$

ou

$$\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\mathcal{C}} (vdx + udy) \quad (5.2.20)$$

et par les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow i \oint_{\mathcal{C}} (vdx + udy) = 0 \quad (5.2.21)$$

Donc la partie réelle et imaginaire de l'intégrale de 5.2.14 étant zéro on obtient :

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$$

C.Q.F.D.

3 Formule de l'intégrale de Cauchy

Le troisième résultat fondamental, et très important par ses applications, est le théorème de l'intégrale de Cauchy :

Théorème 5.3.

Soit $f \in H(\Omega)$ et soit $\mathcal{C}$ un contour fermé dans le domaine Ω ; soit z_0 un point quelconque intérieur à $\mathcal{C}$,

$\Rightarrow$

la valeur à z_0 de f est donnée par l'intégrale :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \quad (5.3.22)$$

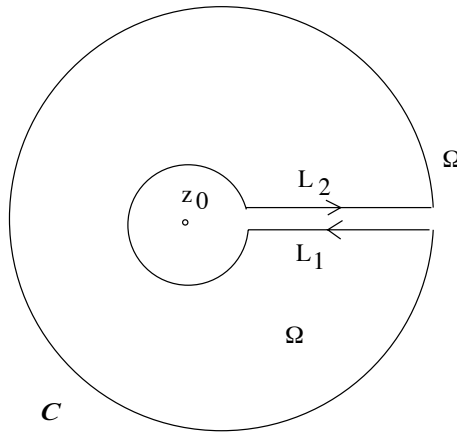


FIG. 5.4 – Pour la preuve : le contour $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup L_1 \cup \mathcal{C}_0 \cup L_2$

Preuve

En choisissant le contour fermé : $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup L_1 \cup \mathcal{C}_0 \cup L_2$, on peut appliquer le théorème de Cauchy 1.2 pour la fonction : $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ qui est analytique dans toute la région bornée par $\tilde{\mathcal{C}}$ (car z_0 n'y appartient pas).

Donc, on écrit :

$$\oint_{\tilde{\mathcal{C}}} g(z)dz = 0$$

ou

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

car les contributions sur les segments L_1, L_2 s'annulent mutuellement ayant des sens opposés.

Pour l'intégrale sur le petit cercle $\mathcal{C}_0$, on pose :

$$\underline{z - z_0 = re^{i\theta}} \Rightarrow dz = re^{i\theta} i d\theta ; (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) re^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} \\ &= -2\pi i \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) = -2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

(Le signe - est obtenu en supposant positive l'orientation donnée sur la figure pour $\mathcal{C}$)
donc

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = 0$$

C.Q.F.D.

Remarque 5.4.

La première application de la formule intégrale de Cauchy est la détermination de la dérivée de toute ordre d'une fonction analytique $f(z)$. Autrement dit l'analyticité de f implique non seulement l'existence et l'analyticité de f' mais automatiquement l'existence et l'analyticité de toute $f^{(n)}$. On montre (sans difficulté) le résultat suivant :

Proposition 5.1.

Soit $f \in H(\Omega)$ et soit $\mathcal{C}$ un contour fermé dans le domaine Ω ,
 $\Rightarrow$ la valeur en z_0 de tout ordre dérivée de f est donnée par l'intégrale

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

L'application la plus importante de la formule intégrale de Cauchy est donnée par le théorème de Mor ira (qu'on présente sans démonstration) et qui constitue **la réci-proque du théorème de Cauchy**.

Théorème 5.4.

Soit f continue sur un domaine Ω (ou Ω simplement connexe) et pour tout contour fermé $\mathcal{C}$ dans Ω supposons que :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

$\Rightarrow f$ est analytique dans Ω .

Chapitre 6

Introduction aux fonctions analytiques II .

1 Séries de Taylor et séries de Laurent

1 Séries entières

On a vu précédemment qu'un polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$ ($n < \infty$) est une fonction analytique $\forall z \in \mathbb{C}$. On peut étendre ce résultat au cas d'une série entière qui est une forme générale d'une série de Taylor par le théorème suivant :

Théorème 6.1.

- i) Soit f une fonction analytique à l'intérieur et sur le bord Γ d'un disque (z_0, r) centré à z_0 et de rayon r ($\Rightarrow f \in H(\Omega)$ où $\Omega = D(z_0, r)$).
 $\Rightarrow$ La valeur $f(z)$ de la fonction à tout point z intérieur à Γ ($|z - z_0| < r$) est donnée par la série entière **uniformément convergente** :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (6.1.1)$$

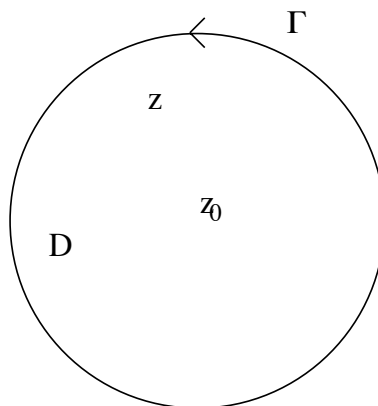
qui est aussi une série de Taylor avec coefficients :

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dz^n} \right|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' \quad (6.1.2)$$

Le rayon R^* de convergence de la série entière est inférieur à la distance de z_0 , de la **singularité** la plus proche de f .

ii) Réciproquement

Soit f une fonction qui admet un développement en série entière convergente $\forall z \in D(z_0, R)$
 $\Rightarrow f \in H(\Omega)$ ($\Rightarrow f$ est analytique en tout point du disque ouvert $D(z_0, R)$).

FIG. 6.1 – Le disque D, domaine d'analyticité, de centre z_0 .***Rappel :**

Définition du rayon R de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Remarque 6.1.

On appelle **singularité** tout point $z_s \in \mathbb{C}$ tel que la dérivée $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_s}$ n'existe pas.

Preuve

- i) Comme f est analytique à l'intérieur de $D(z_0, r)$, on aura d'après la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z')}{z' - z} dz' \quad (6.1.3)$$

On effectue un développement en série du dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z' - z} &= \frac{1}{z' - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z' - z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0}} \right] \\ &= \frac{1}{z' - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

et comme

$$\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1 \quad (6.1.5)$$

(car $z' \in \Gamma$ et z appartient à l'intérieur de Γ) on a la convergence de la série (6.1.4). Mais toute série entière convergente pour $|z - z_0| < R$, converge **aussi uniformément** pour $|z - z_0| < R$.

Donc, la série géométrique (6.1.4) est **uniformément convergente** pourvu que (6.1.5) soit vérifiée.

Substitution de (6.1.4) dans l'intégrand de (6.1.3) donne ensuite :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{\Gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz' \quad (6.1.6)$$

où la convergence uniforme de la série a permis l'intégration terme à terme.

La démonstration sera complète si on ajoute la conclusion sur le rayon de convergence : R sera fourni par le région de validité de (6.1.3) (Théorème de l'intégration de Cauchy), formule valable seulement quand $f(z)$ est analytique à l'intérieur du contour Γ .

ii) Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (6.1.7)$$

où la série est convergente pour $|z - z_0| < R$. Ceci implique qu'on peut trouver une constante $A > 0$ telle que la distance $|z - z_0| = r$ vérifie : $|a_n| r^n < A \quad \forall n$. Donc la somme des termes avec $M \leq n \leq N$ vérifie :

$$\left| \sum_{n=M}^N a_n (z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=M}^N |a_n| |z - z_0|^n \leq A \sum_{n=M}^N \frac{|z - z_0|^n}{r^n}$$

(somme d'un nombre fini de termes d'une série géométrique).

$$= A \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^M \frac{1 - \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^{N-M}}{1 - \frac{|z - z_0|}{r}} \quad (6.1.8)$$

Pour $|z - z_0| < r$ la quantité du membre de droite de 6.1.8 décroît :

et

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \left(1 - \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^{N-M} \right) \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^M = 0$$

indépendamment de z , donc la **convergence de (6.1.7) est uniforme** donc on peut intégrer terme à terme, et on obtient :

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_C (z - z_0)^n dz = 0 \quad (6.1.9)$$

Ici, C est un contour fermé à l'intérieur de $D(z_0, r)$.

Conséquence : Par application du théorème de Moréra, $f(z)$ est analytique pour $|z - z_0| < r$.

Comme r peut être arbitrairement proche de R

$$\Rightarrow \underline{f(z) \in H(D(z_0, R))} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2 Séries de Laurent

Si le domaine d'analyticité Ω d'une fonction $f \in H(\Omega)$ est tel qu'il ne contient pas un disque $D(z_0, R)$ donné, il est bien sûr impossible de définir un développement de Taylor correspondant. Il n'est pas pour autant impossible d'effectuer un autre développement en série de la fonction à tout voisinage des points d'une couronne $S \subset \Omega$ qui sera comprise entre deux cercles de même centre $z_0 \in \mathbb{C}$. Il s'agit du développement en série de Laurent, qui est analogue à une série de Taylor mais qui comporte non seulement des puissances n (entières) positives, mais aussi négatives, et qu'on présente sous la forme du théorème suivant :

Théorème 6.2 (Série de Laurent).

Soit $f \in H(\Omega)$; soit S une couronne qui appartient à Ω , et qui est délimitée par deux cercles Γ_1 et Γ_2 (de centre z_0) qui appartiennent aussi au domaine d'analyticité Ω de f ,

$$\Rightarrow \forall z \in S, f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \quad (6.1.10)$$

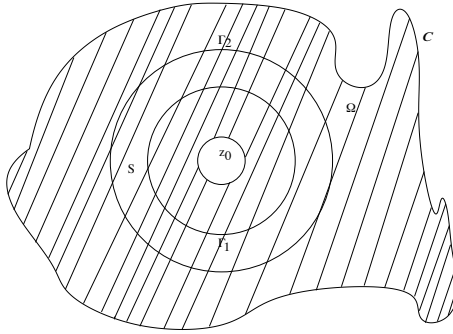


FIG. 6.2 – domaine Ω hachuré, couronne S .

avec

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' \quad (6.1.11)$$

La série (6.1.10) est uniformément convergente et donne la valeur de la fonction f en tout point z de la couronne S , comme développement autour d'un point $z_0 \notin \Omega$.

Le contour fermé appartient entièrement à S et encercle le point z_0 .

Preuve

On considère le contour fermé C de la figure ci-dessus où γ est un petit "cercle coupé" qui entoure $z \in S$. Comme z est un point extérieur au domaine $\tilde{\Omega}$ délimité par C , la fonction $\frac{f(z')}{z' - z}$ avec $z' \in \Omega$, sera analytique dans $\tilde{\Omega}$, donc d'après le théorème de Cauchy :

$$\oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 0 \quad (6.1.12)$$

Les petits segments de droite, qui font partie du contour C , peuvent être choisis arbitrairement proches, et comme ils ont des directions opposées, leur contribution est

nulle. On peut donc écrire (6.1.12) sous la forme suivante :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} d\tilde{z} + \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z'')}{z'' - z} dz'' \quad (6.1.13)$$

(où les signes devant les intégrales déterminent les orientations fixées sur la figure précédente, et où tous les contours sont fermés).

Pour l'intégrale sur le petit cercle γ la formule intégrale de Cauchy donne (f analytique en z)

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} d\tilde{z} = 2\pi i f(z) \quad (6.1.14)$$

Pour l'intégrale sur Γ_2 , on peut obtenir un développement en série de Taylor comme dans (6.1.3), soit :

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z'')}{z'' - z} dz'' \quad (6.1.15)$$

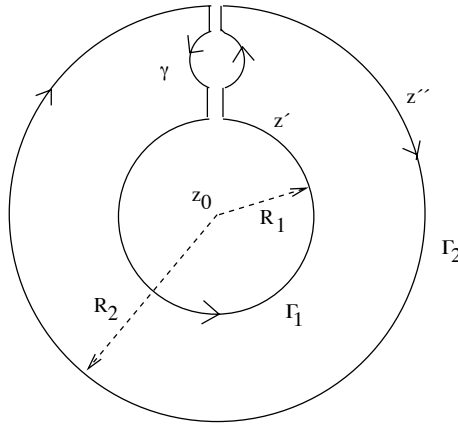


FIG. 6.3 – Le contour fermé $\Gamma_1 \cup \gamma \cup \Gamma_2$

On écrit

$$\frac{1}{z'' - z} = \frac{1}{z'' - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z'' - z_0}} = \frac{1}{z'' - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z'' - z_0} \right)^n \quad (6.1.16)$$

Mais par la configuration géométrique de la figure précédente, on a :

$$\left| \frac{z - z_0}{z'' - z_0} \right| < 1 \quad (6.1.17)$$

et par le même argument que dans (6.1.7) la convergence de la série de (6.1.16) est uniforme : donc, on peut intégrer dans (6.1.15) terme à terme et avoir :

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z'')}{(z'' - z_0)^{n+1}} dz'' \quad (6.1.18)$$

Cette dernière relation est un développement du type Taylor de I_2 autour de z_0 :

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n a_n \quad (6.1.19)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z'')}{(z'' - z_0)^{n+1}} dz'' \quad (6.1.20)$$

Pour l'intégrale sur Γ_1 , on a d'une manière analogue :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' \quad (6.1.21)$$

En écrivant :

$$\frac{1}{z' - z} = \frac{1}{(z' - z_0) - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z' - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right)^n \quad (6.1.22)$$

et comme la configuration géométrique de la figure précédente donne :

$$\left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| < 1 \quad (6.1.23)$$

l'argument analogue à celui de (6.1.3) assure la **convergence uniforme de la série** (6.1.26), ce qui permet d'intégrer terme à terme dans (6.1.21) sur Γ_1 et avoir :

$$I_1 = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}} \oint_{\Gamma_1} (z' - z_0)^m f(z') dz' \quad (6.1.24)$$

Transformons : $m \rightarrow -n - 1$ (ou $-n = m + 1$) on obtient :

$$I_1 = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^0 (z - z_0)^n \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' \quad (6.1.25)$$

ou

$$I_1 = - \sum_{n=-\infty}^0 (z - z_0)^n b_n \quad (6.1.26)$$

avec

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz' \quad (6.1.27)$$

Les conditions de convergence uniforme (6.1.17)(6.1.23) des séries (6.1.19) et (6.1.26) respectivement, assurent le domaine de validité du développement en série de f dans la couronne S définie par :

$$R_1 < |z - z_0| < R_2 \quad (6.1.28)$$

où R_1 et R_2 représentent les rayons des cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement. Finalement, en rassemblant les résultats (6.1.14) (6.1.19) et (6.1.26) (resp.(6.1.20) et (6.1.27)) dans la formule (6.1.13) on a :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(z'')}{z'' - z} dz'' - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

où

$$d_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \geq 0 \\ b_n & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Exemple 6.1. Soit la fonction $f(z) = [z(z-1)]^{-1}$. Apparemment la fonction f n'est pas analytique en $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$. Donc on peut considérer la "couronne" S définie par :

$$S : 0 < |z - z_0| < 1 \quad (R_1 = \varepsilon, R_2 = 1 - \varepsilon \text{ avec } \varepsilon > 0)$$

Par les formules ci-dessus, (6.1.20), (6.1.27) et (6.1.29) on aura :

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n z^n \quad (6.1.30)$$

où

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{(z' - 1)z'^{n+2}} dz' \quad \text{pour } n < 0 \quad (6.1.31)$$

et

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{(z'' - 1)z''^{n+2}} dz'' \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (6.1.32)$$

Les deux intégrales donnent le même résultat car :

a) En général en posant $z = Re^{i\theta}$, $dz = iRe^{i\theta}d\theta$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} z^{m-n-1} dz &= \frac{R^{m-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \\ &= \delta_{m,n} \text{ (delta de Kronecker)} \end{aligned}$$

b) En utilisant le développement de Taylor de la fonction :

$$g(z) = \frac{1}{z-1} \in H(D(0,1))$$

précisément

$$\begin{aligned} g(z) &= - \sum_{m=0}^{\infty} z^m \\ d_n &= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} z^m}{z^{n+2}} dz \\ &= - \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} R^{m-n-1} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n-1)\theta} d\theta \end{aligned}$$

(et tenant compte de la convergence uniforme de la série ... on intègre terme à terme en passant aussi en coordonnées polaires et en appliquant le résultat du a)). alors :

$$d_n = - \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m,n+1} = \begin{cases} -1 & \text{pour } n \geq -1 \\ 0 & \text{pour } n < -1 \end{cases}$$

Donc finalement (6.1.30) s'écrit :

$$\frac{1}{z(z-1)} = - \frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 \dots = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \quad (6.1.33)$$

La série (6.1.33) est la série de Laurent de f **uniformément convergente** dans le disque ouvert rivi de l'origine $(D(0,1) / \{z_0 = 0\})$.

Et, ... pour finir **quelques références** sur les fonctions analytiques.

Bibliographie

- [1] G. ARFKEN, “Mathematical Methods for Physicists”(Academic Press)
- [2] J. BASS, “Cours de Mathématiques” (Masson)
- [3] G. CHOQUET, “Cours d’Analyse” Tome II Topologie (Masson)
- [4] R.COURLANT -D.HILBERT “Methods of Mathematical.Physics”
(Inerscience,Publishers)
- [5] P. DENNERY - A. KRZYWISKI, “Mathematics for Physicists”
(Harper-Internat. Editions et “Dover” Publ.)
- [6] W.RUDIN
 - a) W. RUDIN, “Analyse réelle et complexe” (Masson)
 - b) W. RUDIN, “Principles of Mathematical Analysis” (McGraw-Hill)
- [7] Séries SCHAUM’S (McGraw Hill)
- [8] L.SCHWARTZ “Cours d’Analyse (I, II)”(Hermann)