

MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR
ANALYSE
I (Ch. 4)
INTEGRATION III. (D)

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

	ANALYSE	1
4	Introduction élémentaire à la théorie des distributions et leurs applications en Physique	1
1	L'espace vectoriel $\mathcal{D}$ (sur $\mathbb{C}$)	1
1	Les fonctions à support compact	1
2	Définition d'une Distribution T	2
1	Les distributions sur D	2
2	L'espace $\mathcal{D}'$	2
3	Dérivation des distributions	3
4	Exemples de distributions	3
5	Exemple -Problème	
	Potentiel Newtonien ou Potentiel Coulombien	5
1	Enoncé	5
2	Solution	6

Table des figures

4.1	Le support compact K d'une fonction $\phi \in \mathcal{D}$	1
-----	--	---

Chapitre 4

Introduction élémentaire à la théorie des distributions et leurs applications en Physique

1 L'espace vectoriel $\mathcal{D}$ (sur $\mathbb{C}$)

1 Les fonctions à support compact

Définition 4.1.

$\mathcal{D} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Ensemble de fonctions } \phi \text{ sur } \mathbb{R}^n, \text{ à valeurs complexes indéfiniment dérivables, et à } \underline{\text{support compact}}.$

$\iff \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad \exists \quad K \subset \mathbb{R}^n \text{ ensemble fermé et borné (**compact**) en dehors duquel } \phi = 0$

La figure suivante (cf.fig.4.1) illustre le cas particulier d'une fonction $\phi \in \mathcal{D}$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, ayant comme support $K \subset \mathbb{R}$

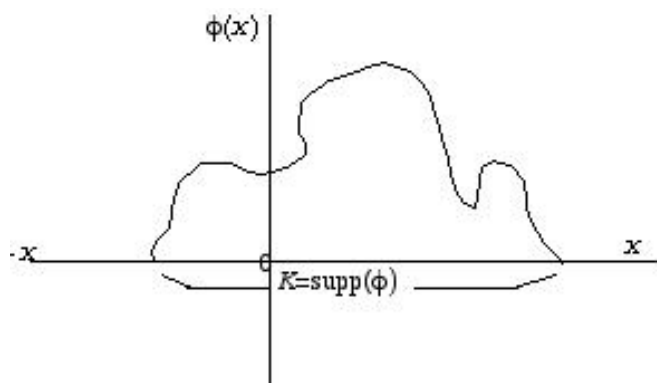


FIG. 4.1 –

Le support compact K d'une fonction $\phi \in \mathcal{D}$

Remarques

1. $\mathcal{D}$ esp. vect. sur $\mathbb{C}$
2. $\mathcal{D}$ anneau avec :

$$\text{supp}\{\phi\psi\} = \text{supp}\{\phi\} \cap \text{supp}\{\psi\}$$

Théorème 4.1. (Th.d'approximation)

Toute fonction continue f à support borné K peut être **uniformément approchée** par une fonction $\phi \in \mathcal{D}$ et t.q.

$$\text{supp}\{\phi\} \in \mathcal{V}(K) \quad (\mathcal{V} \text{ voisinage de } K)$$

2 Définition d'une Distribution T **1 Les distributions sur $\mathcal{D}$** **Définition 4.2.**

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \text{fonctionnelle linéaire continue sur } \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \phi \in \mathcal{D} \\ (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}^2 \\ \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \quad \exists \quad \left\{ \begin{array}{l} T(\phi) \in \mathbb{C} \\ T(\phi_1) \text{ et } T(\phi_2) \in \mathbb{C} \\ \text{t.q.} \\ (i) \quad T(\lambda\phi) = \lambda T(\phi) \\ T(\phi_1 + \phi_2) = T(\phi_1) + T(\phi_2) \\ (ii) \quad \text{si } \{\phi_j\}_{j \rightarrow \infty} \rightarrow \phi \\ \Rightarrow T(\phi_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T(\phi) \end{array} \right.$$

2 L'espace $\mathcal{D}'$ **Définition 4.3.**

$$\mathcal{D}' \stackrel{\text{def}}{=} \text{L'ensemble de distributions}$$

$$\implies \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}^* \text{ (dual de } \mathcal{D})$$

Remarque 4.1. $\mathcal{D}'$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ car on voit directement :

$$\forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}' \quad \left\{ \begin{array}{l} (T_1 + T_2)(\phi) = T_1(\phi) + T_2(\phi) \\ (\lambda T)(\phi) = \lambda(T)(\phi). \end{array} \right.$$

3 Dérivation des distributions

Définition 4.4.

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}(\phi) = -T\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)$$

Généralisation :

Théorème 4.2.

Toute distribution T a des dérivées successives de tous les ordres (et on peut permuter l'ordre).

4 Exemples de distributions

Exemple 4.1.

Soit f localement sommable ($\iff$ **sommable sur tout ensemble borné**) au sens de Lebesgue. On définit :

$$\forall \phi \in \mathcal{D} \begin{cases} T_f(\phi) = \int \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int f(x) \phi(x) d^n x. \\ \text{C'est une distribution} \iff T_f \in \mathcal{D}' \end{cases}$$

Exemple 4.2.

Soit $D^{[n]}$ l'opérateur linéaire dérivée partielle d'ordre quelconque et soit f une fonction localement sommable

On définit :

$$\forall \phi \in \mathcal{D} \begin{cases} T_{D,f}(\phi) = \int \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int f(x) (D^{[n]} \phi(x)) d^n x \\ \text{C'est une distribution} \iff T_{D,f} \in \mathcal{D}' \end{cases}$$

Exemple 4.3. La distribution δ -de Dirac

– 1)

Un peu de ... préhistoire !

Définition des Physiciens

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) &= 0, & \forall x \neq 0 \\ \delta(0) &= \infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \delta(x-a) &= 0 & \forall x \neq a \\ \delta(x-a) &= \infty & \text{si } x = a \end{aligned}$$

– 2)

Définition 4.5. (Définitions équivalentes mais plus ...mathématiques de δ -de Dirac) :

$$\begin{aligned} &\forall \phi \in \mathcal{D} \\ (a) &\text{ pour } x = 0 \\ &\implies \delta(\phi) = \phi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) &\text{ pour } x = a \\ \implies &\delta_{(a)}(\phi) = \phi(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) &\text{ si } \{0\} \in \text{supp } \{\phi\} \\ \implies &\int \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int \delta(x) \phi(x) d^n x = \phi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) &\text{ si } a \in \text{supp } \{\phi\} \\ \implies &\int \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int \delta(x-a) \phi(x) d^n x = \phi(a) \end{aligned}$$

– 3)

Définitions de δ -de Dirac comme limite de suites de fonctions :

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$$

$$\text{avec : } \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

$$\text{ou : } \delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$$

$$\text{ou encore } \delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

– 4)

Représentation intégrale de δ - de Dirac

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{ixt} dt$$

$$\implies \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dt$$

$\implies \delta(x) \equiv$ **transformée inverse de Fourier de 1**
(au sens des distributions)

– 5)

δ -de Dirac en N -dimensions

$$\delta_N(x - x') \stackrel{\text{def}}{=} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \cdots \delta(x_N - x'_N)$$

– 6)

Changement de variables :

$$X \rightarrow Y \quad \delta_N(X - X') = J^{-1} \delta_N(Y - Y')$$

– 7)

La distribution δ -de Dirac en coordonnées sphériques :

$$x' = r' \sin \theta' \cos \phi'; y' = r' \sin \theta' \sin \phi'; z' = r' \cos \theta'$$

$$\delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') = \frac{\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')}{r^2 \sin \theta}$$

– 8) **Transformée de Fourier de la distribution δ -de Dirac**

$$(\tilde{\delta}_k) \equiv \mathcal{F}[\delta] = 1$$

Exemple 4.4. Fonction Heaviside (échelon unité) :

Définition 4.6.

$$Y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

dérivée

$$Y'(\phi) = -Y(\phi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x)\phi'(x)dx = \\ - \int_0^{\infty} \phi' dx = -\phi(x)]_0^{\infty} = \phi(0) = \delta(\phi)$$

$$\boxed{Y' = \delta}$$

Dérivées suivantes de Y (qui sont les dérivées successives de δ)

$$Y'' = \delta'(\phi) = -\delta(\phi') = -\phi'(0) \\ Y^{m+1} = \delta^{(m)}(\phi) = (-1)^m \phi^{(m)}(0)$$

Exemple 4.5. Exemples applications en Physique

(a)

$$\delta_{(a)} \equiv \text{la masse} + 1 \text{ en } a$$

ou

$$\delta_{(a)} \equiv \text{la charge ponctuelle unité en } a$$

(b) $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonction localement sommable d'après Lebesgue :

$$\Leftrightarrow$$

distribution de charge dans un volume Ω .

Charge totale

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \rho(x) d^3x = Q$$

(c) **Mécanique Quantique** : fonction de densité de probabilité, de présence d'un système- particule dans un élément de volume élémentaire d^3x :

$$\rho(x) = |\Psi(x)|^2$$

Normalisation :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi|^2 d^3x = 1$$

5 Exemple -Problème

Potentiel Newtonien ou Potentiel Coulombien

1 Enoncé

Obtenir la solution de l'équation de Poisson :

$$(P. O) \quad \Delta \Psi(\vec{r}) = -4\pi \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.5.1)$$

(où $\rho(\vec{r})$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ intégrable d'après Lebesgue et qui représente physiquement la densité de masse ou de charge au point de l'espace de coordonnées $\vec{r}(x, y, z)$).

2 Solution

- (i) On considère l'équation de Poisson qui correspond à une charge ponctuelle à $\vec{r}$:

$$\Longleftrightarrow \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta_3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.5.2)$$

On appelle la fonction inconnue G = fonction de Green

– ia)

On présente d'abord (sans démonstration) un résultat mathématique qu'on utilisera pour la fonction de Green G solution de 4.5.2 :

Théorème 4.3.

Si G est connue :

$$\Psi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} G(\vec{r}', \vec{r}) d\vec{r}'$$

– i.b)

Calcul de $\tilde{G}(k)$: en prenant la transformée de Fourier aux 2 membres de 4.5.2
 $\Rightarrow$ (rappel T.D.)

$$\begin{aligned} -k^2 \tilde{G}(\vec{k}) &= -1 \\ \Rightarrow \tilde{G}(\vec{k}) &= \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

– i.c) Transformée de Fourier inverse :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 \vec{k} \frac{e^{j\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{k^2}$$

on choisit :

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \parallel k_z$$

et en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') &= k R \cos \theta \\ d_3 \vec{k} &= dk_1 dk_2 dk_3 = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi \\ \Rightarrow G(\vec{r} - \vec{r}') &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d(\cos \theta)}{(2\pi)^3} e^{jkR \cos \theta} dk d\theta d\phi \end{aligned}$$

et

$$\int_0^\pi d(\cos \theta) e^{jkR \cos \theta} = \left[\frac{1}{jkR} e^{jkR \cos \theta} \right]_0^\pi = \frac{2 \sin kR}{kR}$$

et

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

et on sait (voir T.D. maths)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \\ G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{2\pi \times \pi}{(2\pi)^3 R} = \frac{1}{4\pi |r - r'|} \\ G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi |r - r'|} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

qui est le potentiel Coulombien d'une charge (ou d'une masse) unité, (parmi vos connaissances fondamentales en physique ...)

- (ii) On a trouvé la solution pour le potentiel dû à une charge ponctuelle au point $\vec{r}'$ or la distribution de la charge dans tout l'espace ($\vec{r}'$) s'exprime par :

$$\rho(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Donc, d'après le théorème 4.3 la solution à tout point $\vec{r}$ (de l'observateur) de (P.0) sera donnée par :

$$\Psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz'$$

Résultat qu'on attendrait par les notions fondamentales d'électromagnétisme.

Terminons ce chapitre par quelques références.

Bibliographie

- [1] G. ARFKEN, “Mathematical Methods for Physicists”(Academic Press)
- [2] J. BASS, “Cours de Mathématiques” (Masson)
- [3] G. CHOQUET, “Cours d’Analyse” Tome II Topologie (Masson)
- [4] R.COURANT -D.HILBERT “Methods of Mathematical.Physics”
(Inerscience,Publishers)
- [5] P. DENNERY - A. KRZYWINSKI, “Mathematics for Physicists” (Harper-Internat.
Editions et “Dover” Publ.)
- [6] J. DIEUDONNE “Foundations of Modern Analysis”
(Academic Press N.York)
- [7] B. FRIEDMAN“ Principles and Techniques of Applied Mathematics”
(J.Wiley and Sons)
- [8] A.GUICHARDET , “Intégration-Analyse Hilbertienne”
(X- Polytechnique- Ellipses)
- [9] W.RUDIN
 - a) W. RUDIN, “Analyse réelle et complexe” (Masson)
 - b) W. RUDIN, “Principles of Mathematical Analysis” (McGraw-Hill)
- [10] Séries SCHAUM’S (McGraw Hill)
- [11] L.SCHWARTZ
 - a)“Cours d’Analyse (I, II)” (Hermann)
 - b)“Cours de Méthodes Mathématiques pour la Physique” (Hermann)
 - a)“Théorie de Distributions” (Hermann)
- [12] A.J.WEIR, “Lebesgues-Integration and Measure”
(Cambridge Univ.Press)