

MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR
ANALYSE
I (Ch. 3)
INTEGRATION II. (C)

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

	ANALYSE	1
3	INTEGRATION II	
	Transformation de Laplace - Applications	1
1	La transformée de Laplace	1
1	1 Introduction	1
2	2 Transformation de Laplace (Définition)	1
3	3 Exemples	2
2	Relation entre $F(\eta)$ (transformée de Fourier) et $L(p)$ (transformée de Laplace)	5
1	1 Equivalence	5
3	Propriétés de la transformée de Laplace	6
1	1 Linéarité	6
2	2 Propriété de la translation	6
3	3 Propriété de changement d'échelle.	7
4	4 Propriété duale du retard	7
5	5 Dérivation	7
6	6 Dérivées de $L(p)$ dans $\mathbb{C}$	8
7	7 Primitives (Transformée de Laplace d'une intégrale)	9
8	8 Original de $L(p)$ -(Transformée de Laplace inverse)	9
4	Applications de la transformation de Laplace	10
1	1 Méthode	10
2	2 Exemples	10

Table des figures

3.1	Plan $p = \xi + j\eta$	Plan $(t, y = f(t))$	3
-----	------------------------	----------------------	---

Chapitre 3

INTEGRATION II

Transformation de Laplace - Applications

1 La transformée de Laplace

1 Introduction

Dans ce deuxième chapitre de l'introduction à la théorie de la mesure et comme meilleure illustration de l'intégrale de Lebesgue, (v. cours précédent), on s'intéresse au concept mathématique bien important pour ses applications :

La transformation de Laplace.

Cette opération constitue un outil mathématique équivalent à celui de la transformation de Fourier (ne serait-ce que plus approprié dans certains cas) pour les sciences de l'ingénieur. Dans la première partie du cours, après la définition et la mise en évidence de la relation avec la transformation de Fourier, on présente les propriétés fondamentales de la transformée de Laplace. La deuxième partie contient les applications les plus importantes de la transformation de Laplace :

Résolution d'équations et de systèmes différentiels ou intégrals

2 Transformation de Laplace (Définition)

Définition 3.1 (Existence de la transformée de Laplace).

On considère une fonction numérique $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

La transformation de Laplace $\mathcal{L}$, est une application linéaire qui associe à f la fonction (de la variable complexe $p \in \mathbb{C}$) :

$$\mathcal{L}[f] = L(p)$$

définie par l'intégrale,

$$L(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt ; \text{ (où } p = \xi + i\eta, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \quad i^2 = -1) \quad (3.1.1)$$

*Lorsque l'intégrale existe au sens de Lebesgue ¹, la fonction $L(p)$ ainsi **bien définie***

¹ Voir cours précédent

est appelée la **transformée de Laplace**.

Notations équivalentes :

$$\mathcal{L}[f(t)] \Leftrightarrow \mathcal{L}_f(p) \Leftrightarrow L(p) \Leftrightarrow L_f(p) \Leftrightarrow \mathcal{L}[f](p)$$

Voici d'abord une condition suffisante de l'existence de $L(p)$.

Théorème 3.1.

Soit f une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^+$ et soit :

$$p = \xi + i\eta \quad ((\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2).$$

Si la fonction $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ est intégrable (au sens de Lebesgue) pour une valeur $p_0 = \xi_0 + i\eta_0$, alors elle est intégrable dans tout le demi-plan complexe défini par $\xi \geq \xi_0$.

Preuve

On a :

$$|e^{-pt}f(t)| \leq e^{-\xi t}|f(t)| \leq e^{-\xi_0 t}|f(t)| \quad \forall p \text{ tel que } \xi \geq \xi_0.$$

Donc la fonction $e^{-pt}f(t)$ est majorée dans le demi-plan $\xi \geq \xi_0$, par une fonction intégrable ; par application d'une des propriétés de dominance² de l'intégrale de Lebesgue on obtient que $e^{-pt}f(t)$ est aussi intégrable (**c.q.f.d.**).

Conséquences

- i) D'après le résultat précédent, l'ensemble des nombres réels tels que l'intégrale 3.1.1 soit convergente est une demi-droite qui a une des formes suivantes :

$$]\xi_0, +\infty[, [\xi_0, +\infty[,]-\infty, +\infty[\quad \text{ou le } \emptyset.$$

On appelle ξ_0 l'**abscisse de convergence** de $L(p)$. Le demi-plan $\xi_0 \leq \xi$ est appelé **demi-plan de convergence** de $L(p)$.

- ii) Pour que $L(p)$ soit bien définie, il suffit qu'il existe deux nombres réels $\mu > 0$ et k t.q. :

$$|f(t)| \leq \mu e^{k \cdot t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1.2)$$

Alors l'intégrale 3.1.1 existe dans le demi-plan de $\mathbb{C}$ défini par $\xi > k$.

3 Exemples

- 1) Considérons la fonction exponentielle : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R} \quad (3.1.3)$$

D'après le critère 3.1.2, $k = -a$ et $L(p)$ existe si $\xi + a > 0$. Dans le cas plus général où $a \in \mathbb{C}$ on peut aussi écrire la condition sous la forme $\Re(p + a) > 0$. Calculons $L(p)$ en supposant vraie cette condition de convergence.

²On fait appel à une des propriétés des intégrales de Lebesgue analogue à celle qui existe pour les intégrales de Riemann : soit E un ensemble mesurable si f est mesurable et majorée $|f| \leq g$ par une fonction g intégrable par rapport à la mesure $\mu \Rightarrow f$ est intégrable et $\int_E |f| d\mu \leq \int_E g d\mu$.

$$\begin{aligned}
 L(p) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-pt} dt &= \lim_{X \rightarrow +\infty} - \left[\frac{e^{-(a+p)X}}{a+p} \right]_0^X \\
 &= \lim_{X \rightarrow +\infty} - \frac{e^{-(a+p)X}}{p+a} + \frac{1}{p+a}
 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Or le terme $\frac{e^{-(a+p)X}}{p+a} \rightarrow 0$ pour $X \rightarrow \infty$ car $\mathcal{Re}(p+a) > 0$

$$\Rightarrow L(p) = \frac{1}{p+a} \Rightarrow \text{Ensemble de définition de } L(p) : \underline{D_L = \mathbb{C} - \{-a\}}$$

Faisons maintenant l'interprétation géométrique du cas intéressant en Physique : $\mathcal{Re}(a) \in \mathbb{R}^{+*}$ (cas particulier de l'exemple $a = 2$)

La valeur $p_0 = -a = -2$ (racine du dénominateur de $L(p)$) est une "singularité" pour $L(p)$ si $\mathcal{Re}(a) > 0$.

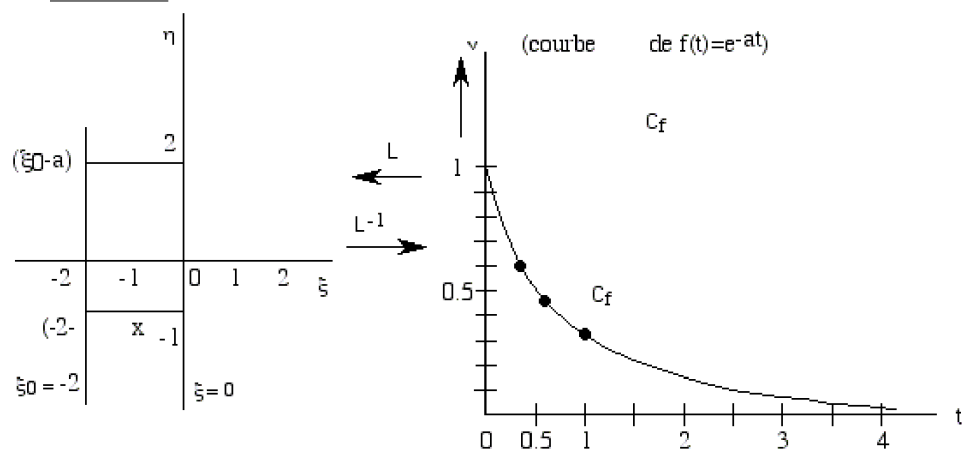


FIG. 3.1 – Plan $p = \xi + j\eta$

Plan $(t, y = f(t))$

D'après les deux figures ci-dessus, on voit que pour l'exemple du cas ($a = 2$) $\mathcal{Re}(a) > 0$ les racines (ou "singularités" ou "pôles" de $L(p)$ du dénominateur de $L(p)$) ayant une partie réelle négative (v. ex : la droite $\xi_0 = -2$) correspondent à un comportement très important physiquement de la fonction "originale" $f(t)$:

Elle décroît exponentiellement.

En physique, c'est souvent l'amplitude de diffusion, ou la réponse d'un signal qui doit avoir ce bon comportement.

Conclusion à retenir

Décroissance exponentielle de $f(t)$ (stabilité du système physique)

$\Leftrightarrow$ "Singularité" de $L(p)$ (ξ_0, η_0) au demi-plan négatif : $\xi_0 < 0$

1 - Exemple - cas particulier de 1)

Si $a = 0$ alors, $f(t) = 1$ et d'après (3.1.4)

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re}(p) > 0) \quad (3.1.5)$$

2 - Transformée de Laplace des fonctions $e^{\pm i\omega t}$

Comme application encore de l'exemple 1) on obtient (de (3.1.4))

$$\begin{aligned} a) \quad \text{Si } a &= i\omega, \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[e^{-i\omega t}] = \frac{1}{p + i\omega} \\ b) \quad \text{Si } a &= -i\omega, \omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \frac{1}{p - i\omega} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

3 - Transformée de Laplace de la fonction échelon unité

$$\text{Soit } \mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \text{ (ou fonction theta)}$$

On a $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ avec $\operatorname{Re} p > 0$ (voir 3.1.5)

4 - Transformée de Laplace des puissances

$$\text{Soit } \begin{cases} f(t) = t^n & t \geq 0 \\ f(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}$$

On montre par récurrence que :

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (3.1.7)$$

2 Relation entre $F(\eta)$ (transformée de Fourier) et $L(p)$ (transformée de Laplace)

1 Equivalence

L'analogie entre la définition de la transformée de Laplace $L(p)$ et la transformée de Fourier $F(\alpha)$ (v. cours précédent) nous amène à étudier maintenant la relation entre ces deux fonctions. Soit $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ une fonction dont la transformée de Laplace $L(p)$ (voir 3.1.1) existe. Ecrivons :

$$\underline{L(p)} = \int_0^\infty e^{-(\xi+i\eta)t} f(t) dt = \int_0^\infty f(t) e^{-\xi t} e^{-i\eta t} dt = \underline{F(\eta)} \quad (3.2.8)$$

Ce résultat indique que la **transformée de Laplace** $L(p)$ ($p \in \mathbb{C}$) de $f(t)$ n'est rien d'autre que la **transformée de Fourier** $F(\eta)$ ($\eta \in \mathbb{R}$) de la fonction $e^{-\xi t} f(t)$.

Autrement dit une transformée de Laplace équivaut à une famille de transformées de Fourier : précisément de la famille :

$$\mathcal{G}_\xi(t) = f(t) e^{-\xi t}$$

De plus, pour $\xi = 0$ (p imaginaire pur) $F(\eta) = L(p)$.

Cette propriété a un grand nombre de conséquences. On cite par exemple :

- a) Le calcul des transformées de Fourier à partir des transformées de Laplace plus simples à calculer.
- b) Si l'image de Laplace $L(p)$ de $f(t)$ est nulle pour $\xi \geq \xi_0$ alors $f(t)$ est presque partout nulle³ (car $f(t) e^{-\xi t}$ a une image de Fourier nulle $\Rightarrow$ elle est presque partout nulle $\Rightarrow f(t)$ est presque partout nulle).
- c) De la formule d'inversion de Fourier on déduit :

La formule d'inversion de la transformée de Laplace :

$$f(t) e^{-\xi t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi + i\eta) e^{i\eta t} d\eta \quad (3.2.9)$$

et pour $\underline{\xi = 0}$

$$\underline{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L(p) e^{i\eta t} d\eta} \quad (3.2.10)$$

* On appelle $f(t)$ **l'original de $L(p)$** ou la **transformée de Laplace inverse** (ou **réciroque**) et on note :

$$\underline{\mathcal{L}^{-1}[L(p)] = f(t)} \quad (3.2.11)$$

³ voir cours précédent pour la notion d'une "propriété vraie presque partout"

3 Propriétés de la transformée de Laplace

Voici maintenant les principales propriétés de la transformée de Laplace, d'où résultent ses nombreuses applications.

1 Linéarité

Si les fonctions f et g admettent des transformées de Laplace $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[g]$ respectivement, alors on aura :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g] \quad (3.3.12)$$

(Démonstration évidente)

Exemples

i) On cherche (si elle existe) la transformée de Laplace de la fonction :

$$f(t) = \cos \omega t$$

On écrit : $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$. Or d'après les exemples 3.1.6 on a :

$$\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \frac{1}{p - i\omega} \text{ et } \mathcal{L}[e^{-i\omega t}] = \frac{1}{p + i\omega}$$

Par application de la linéarité de l'opération $\mathcal{L}$ on obtient :

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} [\mathcal{L}[e^{i\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-i\omega t}]] = \frac{1}{2} \frac{p + i\omega + p - i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (3.3.13)$$

ii) On cherche $\mathcal{L}[\sin^2 t]$. Comme $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$

on écrit : $\mathcal{L}[\sin^2 t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}[\cos 2t]$ et par application de la linéarité :

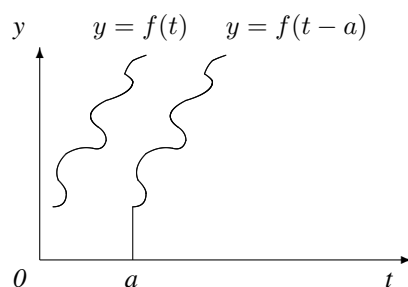
$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 4} \quad (3.3.14)$$

2 Propriété de la translation

Proposition 3.1. - (Théorème du retard)

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit $f(t)$ une fonction dont la transformée de Laplace existe. Alors la fonction g définie par :

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t - a) & \text{pour } t \geq a \\ g(t) &= 0 & \text{pour } t < a \end{aligned}$$



a comme transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-ap} \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.3.15)$$

Preuve

On écrit : $g(t) = f(t-a) \times \mathcal{U}(t-a)$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \int_0^a e^{-pt} g(t) dt + \int_a^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a) da \end{aligned}$$

avec le changement de variable : $t-a = u$, on aura de cette dernière :

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p(a+u)} f(u) du = e^{-pa} \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u) du = e^{-pa} \mathcal{L}[f(t-a)] \quad (\text{c.q.f.d.})$$

3 Propriété de changement d'échelle.

Proposition 3.2. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit $f(t)$ une fonction dont la transformée de Laplace existe. On montre que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f(at)]$ existe et :

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f] \left(\frac{p}{a} \right) \quad (3.3.16)$$

(preuve- exercice)

4 Propriété duale du retard

Proposition 3.3. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit $f(t)$ une fonction dont la transformée de Laplace existe. On montre que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)]$ existe et : (à comparer avec 3.3.15)

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \mathcal{L}[f](p+a) \quad (3.3.17)$$

5 Dérivation

Proposition 3.4. Soit $f(t)$ une fonction dont la transformée de Laplace existe.

$\Rightarrow$

i) La transformée de Laplace de la dérivée $f'(t)$ existe, si $e^{-pt} f'(t)$ est intégrable pour $\xi \geq \xi_0$ et :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p \mathcal{L}[f(t)] - f(0^+) \quad (3.3.18)$$

$$(\text{où } f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t))$$

(preuve facile : en intégrant p. parties)

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = p^n \mathcal{L}[f] - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (3.3.19)$$
$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2 \mathcal{L}[f(t)] - pf(0^+) - f'(0^+) \quad (3.3.20)$$

6 Dérivées de $L(p)$ dans $\mathbb{C}$

Proposition 3.5.

$$\xi_0 < \infty$$
$$\left. \begin{aligned} L'_f(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t)f(t)dt \\ \hline L^n(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t)^n f(t)dt \end{aligned} \right\} \quad (3.3.21)$$

⁴même plus : la série Taylor correspondante est absolument convergente et on dit dans ces cas que la fn. $L(p)$ est holomorphe.

7 Primitives (Transformée de Laplace d'une intégrale)

Proposition 3.6. Soit $\phi(t) = \int_0^t f(u)du$ alors on peut montrer que :

$$\mathcal{L}[\phi(t)] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{p} \quad (3.3.22)$$

Remarque 3.1. Comparons les transformées de Laplace de la dérivée avec la transformée de Laplace d'une intégrale on obtient :
un tableau utile à mémoriser

espace t		espace p
Dérivation	$\Leftrightarrow$	Multiplication par p
Intégration	$\Leftrightarrow$	Division par p
Multiplication par $(-t)$	$\Leftrightarrow$	Dérivation

8 Original de $L(p)$ -(Transformée de Laplace inverse)

A partir des propriétés de $\mathcal{L}[f]$, présentées ci-dessus on déduit facilement les propriétés suivantes pour la transformée de Laplace réciproque :

Proposition 3.7.

Linéarité : $\mathcal{L}^{-1}[\lambda L_f(p) + \mu L_g(p)] = \lambda \mathcal{L}^{-1}[L_f] + \mu \mathcal{L}^{-1}[L_g] \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Original de $L_f(ap)$: $\mathcal{L}^{-1}[L_f(ap)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \quad (\text{où } \mathcal{L}^{-1}[L_f] = f(t))$

Original de $L_f(p+a)$:

$$\mathcal{L}^{-1}[L(p+a)] = e^{-at} f(t)$$

(où $\mathcal{L}^{-1}[L_f] = f(t)$)

Original de $L'_f(p)$:

$$\mathcal{L}^{-1}[L'_f(p)] = -t f(t)$$

Original de $\int_p^\infty L_f(s)ds$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_p^\infty L_f(s)ds\right] = \frac{f(t)}{t}$$

Original de $\frac{1}{p^{n+1}}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!}$$

Exemple 3.1.

Exemples d'originaux obtenus d'après les propriétés et exemples présentés précédemment

$$\begin{aligned}
 a) \quad L_1(p) &= \frac{2}{p^2 + 4} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[L_1] = \sin 2t && (\text{voir } \mathcal{L}[\sin 2t] \text{ en exercice}) \\
 b) \quad L_2(p) &= \frac{1}{p} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1 \\
 c) \quad L_3(p) &= \frac{p}{p^2 + 1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + 1}\right] = \cos t \\
 d) \quad L_4(p) &= \frac{1}{p(p^2 + 1)} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p^2 + 1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + 1}\right] \\
 &= 1 - \cos t \\
 e) \quad L_5(p) &= \frac{1}{(p+2)^2 + 1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+2)^2 + 1}\right] = e^{-2t} \sin t
 \end{aligned}$$

4 Applications de la transformation de Laplace

1 Méthode

La principale application de la transformée de Laplace consiste à la formulation d'une méthode très pratique pour la résolution d'équations différentielles (ou intégrales) et de systèmes différentiels. Les étapes de cette méthode sont les suivantes :

- i) Application de l'opérateur de Laplace $\mathcal{L}$ aux deux membres de l'équation (ou des équations d'un système) en tenant compte des conditions initiales du problème.
- ii) Résolution de l'équation ou du système algébrique obtenu en i)
- iii) Application de la transformation inverse $\mathcal{L}^{-1}$ et détermination de l'original de ii) qui est solution du problème initial.

2 Exemples

Etudions maintenant comment on applique la méthode de la transformée de Laplace (sur deux exemples).

Résolution d'une équation différentielle

Trouvons la solution de l'équation différentielle :

(P.1)

$$y'' + 4y' + 4y = t \quad (B.1)$$

$$\text{vérifiant les conditions initiales : } y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad (B.1.a)$$

Solution**Etape i)**

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t] \quad (B.2)$$

Soit : $\mathcal{L}[y] = Y(p)$

D'après les résultats précédents on a : (v. 3.3.20))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''] &= p^2 Y - py(0) - y'(0) = p^2 Y - 1 \\ \mathcal{L}[y'] &= pY - y(0) = pY \\ \mathcal{L}[t] &= \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

(On a tenu compte des conditions initiales (B.1.a))

Donc (B.2) s'écrit :

$$p^2 Y - 1 + 4pY + 4Y = \frac{1}{p^2} \quad (B.2')$$

Etape ii)

$$\Rightarrow Y = \frac{p^2 + 1}{p^2(p+2)^2} \quad (B.3)$$

Pour effectuer l'étape iii) on a intérêt à décomposer la fraction (B.3) en éléments simples :

$$\begin{aligned} \frac{p^2 + 1}{p^2(p+2)^2} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{(p+2)^2} \Leftrightarrow p^2 + 1 = Ap(p^2 + 4p + 4) + Dp^2 \\ &\quad + B(p^2 + 4p + 4) + Cp^2(p+2) \\ \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} A + C &= 0 \\ 4A + B + 2C + D &= 1 \\ 4A + 4B &= 0 \\ 4B &= 1 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \begin{aligned} B &= \frac{1}{4} = C \\ A &= -\frac{1}{4} \\ D &= \frac{5}{4} \end{aligned} \\ \Rightarrow \frac{p^2 + 1}{p^2(p+2)^2} &= \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{5}{(p+2)^2} \right\} \Leftarrow \end{aligned}$$

Donc

$$Y(p) = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{5}{(p+2)^2} \right\} \quad (B.4)$$

Etape iii)

Application de l'opérateur inverse $\mathcal{L}^{-1}$ aux deux membres de (B.4) donne :

$$y = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[y]] = \frac{1}{4} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{p} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{(p+2)^2} \right] \right\}$$

et en utilisant les résultats du paragraphe 3 de la première section, on obtient :

$$y = \frac{1}{4} \{ -1 + t + e^{-2t} + 5te^{-2t} \} \quad \text{Solution du problème (P.1.)}$$

Remarque B.0

Avantages de la méthode :

- Il n'y a pas de constantes à déterminer** puisque les conditions initiales ont déjà été introduites au problème.
- Le problème algébrique est souvent plus simple** à traiter que le problème différentiel.

Résolution d'un système différentiel

On considère le problème suivant :

Résoudre :

(P.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{array} \right\}$$

avec :

$$\begin{array}{l} x = x(t) ; \quad y = y(t) ; \quad z = z(t) \\ x(0) = 0 ; \quad y(0) = 0 ; \quad z(0) = 3 \\ t \in \mathbb{R}^{**} \end{array}$$

Solution :

Etape i)

On pose $X(p) = \mathcal{L}[x]$; $Y(p) = \mathcal{L}[y]$; $Z(p) = \mathcal{L}[z]$

Application de l'opérateur $\mathcal{L}$ aux deux membres du système différentiel donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} pX = Y + Z \\ pY = X + Z \\ -3 + pZ = X + Y \end{array} \right\} \quad (B.6)$$

Etape ii)

La résolution du système algébrique (B.6) donne :

$$X = Y = \frac{3}{(p+1)(p-2)} \quad (B.7)$$

et

$$Z = Y(P-1) = \frac{3(p-1)}{(p+1)(p-2)} \quad (B.8)$$

La décomposition en éléments simples de (B.7) et (B.8) s'écrit :

$$\frac{3}{(p+1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1} \quad \text{et} \quad \frac{3(p-1)}{(p+1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p+1}$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = Y = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1} \\ Z = \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p+1} \end{array} \right\} \quad (B.9)$$

Etape iii)

Application de l'opérateur inverse $\mathcal{L}^{-1}$ aux deux membres des équations du système (B.9) donne :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X] = \mathcal{L}^{-1}[Y] = y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p-2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+1} \right]$$

$$Z(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p-2} \right] + 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+1} \right]$$

et en utilisant les résultats du paragraphe 3 de la première section on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = y(t) = e^{2t} - e^{-t} \\ z(t) = e^{2t} + 2e^{-t} \end{array} \right\} \quad (B.10)$$

Le système (B.10) est solution du problème **P.2**.

*** *Conclusions : avantages de la méthode* (v. remarque (B.O))