

MODELISATION MATHEMATIQUE

Méthodes numériques de résolution de systèmes différentiels

Le but de ce Tp est d'approcher numériquement la solution de deux systèmes différentiels à l'aide d'un schéma d'Euler.

Résumé :

On va considérer le problème proies-prédateurs. Ce problème a été analysé pour la première fois par Vito Volterra au début des années 1920



Volterra avait été contacté par le bureau de la pêche italienne pour justifier les données statistiques obtenues. Il avait été remarqué que, pendant la première guerre mondiale où la pêche était très réduite, la proportion de requins et autres prédateurs impropres à la consommation était nettement supérieure à ce qu'elle était avant guerre et à ce qu'elle redevenait ensuite. Vito Volterra proposa de modéliser ce problème à l'aide d'un système différentiel où $s(t)$ est le nombre de poissons comestibles (qu'on nommera sardines) et $r(t)$ le nombre de prédateurs

(qu'on nommera requins)



Dans un premier temps, on va écrire un système différentiel en faisant les deux hypothèses suivantes :

- *Hypothèse 1 : les sardines disposent de nourriture en quantité non limitée et seuls les requins s'opposent à la croissance de leur population,*

- *Hypothèse 2 : le nombre de requins est limité par la quantité de sardines dont ils disposent pour se nourrir.*

Question 1

Dans cette question, on suppose que l'évolution de la population composée de sardines et de requins est décrite par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} s'(t) = 4s(t) - 2r(t), \\ r'(t) = s(t) + r(t). \end{cases} \quad (E)$$

On donne les conditions initiales :

$$s(0) = s_0 \text{ et } r(0) = r_0$$

au temps $t = 0$.

1) Ecrire ce système sous forme matricielle et expliquer comment on peut obtenir la solution du système à l'aide d'une exponentielle de matrice. Un travail de recherche sur le sujet est attendu ici et indispensable.

2) Résoudre ce système différentiel sur papier de deux façons différentes (réduction de la matrice et manipulation de l'exponentielle de matrice).

3) Ecrire un code en Scilab pour obtenir la solution du système sur l'intervalle $[0, 1]$ avec la condition initiale

$$s(0) = 2 \text{ et } r(0) = 1.$$

4) Dessiner sur un même graphique avec des couleurs différentes les courbes $(t, s(t))$, $(t, r(t))$ et $(s(t), r(t))$. Que remarquez-vous?

5) Changer les conditions initiales en $(1, 1)$ puis $(1, 2)$. Interprétation.

6) On va maintenant approcher la solution du système à l'aide d'un schéma d'Euler :

(a) Faire une recherche bibliographique succincte mais efficace sur le sujet.

(b) Adapter ce schéma à notre cas concret. On introduira à cette fin une fonction f à deux variables.

(c) Compléter votre code Scilab pour y ajouter cette nouvelle fonctionnalité d'évaluation des fonctions $s(t)$ et $r(t)$.

7) Comparer graphiquement les résultats numériques avec la solution exacte obtenue précédemment.

Question 2

On reprend le problème proies-prédateurs avec les hypothèses suivantes :

- *Hypothèse 3 : en l'absence de requins, s obéit à une loi exponentielle,*

- *Hypothèse 4 : Volterra suppose qu'en l'absence de sardines, r obéit à une loi de décroissance exponentielle. Cette hypothèse est très discutable : en l'absence de sardines, les requins disparaissent probablement en une seule génération.*

- *Hypothèse 5 : le produit $s(t)r(t)$ est proportionnel au nombre de rencontre. Une telle rencontre est bonne pour le requin mais mauvaise pour la sardine.*

Cela nous conduit au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} s'(t) = as(t) - cs(t)r(t), \\ r'(t) = -bs(t) + ds(t)r(t) \end{cases} \quad (E')$$

où a, b, c et d sont positifs.

On ne sait pas résoudre ce système analytiquement. On va donc faire une approche numérique à l'aide du schéma d'Euler.

1) Définir une fonction g qui permette de synthétiser le nouveau problème sous la forme :

$$U' = g(t, U) .$$

2) Modifier le code Scilab pour obtenir le schéma d'Euler dans ce cas non linéaire.

3) Faire tourner ce code avec les valeurs : $a = 2, b = 10, c = 0.001$ et $d = 0.002$. On prendra pour condition initiale le couple $(5000, 100)$ et $T = [0 : 0.05 : 10]$.

4) Représenter l'évolution de la population des requins en fonction de celle des sardines.