

TP 1 - 2 : Séries et convergence

RANCIEN Renaud, GUENIN Antoine

8 février 2011

1 Rappel du problème

Il s'agissait de calculer une valeur approchée satisfaisante de $e^{1,37}$, $\sin(0,21466)$, $\cos(0,21466)$, $\ln(1.338)$, $\sqrt[3]{1.34}$, $(1.2)^{1.3}$, en utilisant uniquement les quatre opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division. Pour cela, il faut utiliser les développements en série entière des fonctions :

$$\forall x \in \mathbb{C}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{N}, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Effectivement, ces développements permettent d'obtenir une valeur approchée de x . Toutefois, les sommes vont jusqu'à l'infini, ce qui dans notre cas est absolument impossible. Il s'agit donc de les arrêter lorsque nous atteignons une valeur acceptable. Pour cela, il faut comparer l'écart entre la valeur au rang $n-1$ et la valeur au rang n à un ϵ choisi au préalable. Si cet écart est inférieur à ϵ alors la somme partielle formée jusqu'au rang n est jugée satisfaisante.

2 Nos fonctions

Pour parvenir aux résultats, nous avons été contraints de créer plusieurs fonctions dans Scilab.

- Tout d'abord, les fonctions qui forment le n-ième élément d'une série entière en fonction de paramètres n et pour la fonction puissance de α .
- Une fonction permettant de calculer la factorielle d'un nombre n .
- Une fonction qui calcule la somme partielle des éléments d'une série en fonction du paramètre n .
- Enfin, la fonction générale qui prend la précision, la fonction et le point auquel on veut notre DSE et qui retourne directement la valeur de ce DSE.

3 Les résultats

Nos résultats ont été recopiés dans des tableaux.

Expression	Valeur réelle	Avec $\epsilon = 0.1$	Écart type
$e^{1,37}$	3.9353507	3.8837902	$5.15605 * 10^{-2}$
$\sin(0, 21466)$	0.2130152	0.21466	$1.6448 * 10^{-3}$
$\cos(0, 21466)$	0.9770489	0.976842	$2.069 * 10^{-4}$
$\ln(1.338)$	0.291176	0.338	$4.66824 * 10^{-2}$
$\sqrt[3]{1.34}$	1.1024738	1.1259259	$2.34521 * 10^{-2}$
$(1.2)^{1.3}$	1.267464	1.26	$7.464 * 10^{-3}$

Expression	Valeur réelle	Avec $\epsilon = 0.001$	Écart type
$e^{1,37}$	3.9353507	3.9349887	$3.62 * 10^{-4}$
$\sin(0, 21466)$	0.2130152	0.2130114	$3.8 * 10^{-6}$
$\cos(0, 21466)$	0.9770489	0.9769605	$8.84 * 10^{-5}$
$\ln(1.338)$	0.291176	0.2904866	$6.894 * 10^{-4}$
$\sqrt[3]{1.34}$	1.1024738	1.1259259	$2.34521 * 10^{-2}$
$(1.2)^{1.3}$	1.267464	1.2678	$3.36 * 10^{-4}$

Expression	Valeur réelle	Avec $\epsilon = 0.0001$	Écart type
$e^{1,37}$	3.9353507	3.9352965	$5.42 * 10^{-5}$
$\sin(0, 21466)$	0.2130152	0.2130114	$3.8 * 10^{-6}$
$\cos(0, 21466)$	0.9770489	0.9769605	$8.84 * 10^{-5}$
$\ln(1.338)$	0.291176	0.2911293	$5.57 * 10^{-5}$
$\sqrt[3]{1.34}$	1.1024738	1.1259259	$2.34521 * 10^{-2}$
$(1.2)^{1.3}$	1.267464	1.267567	$1.03 * 10^{-4}$

On observe que la valeur approchée dépend du ϵ choisi. Plus celui ci est petit, plus on s'approche de la valeur réelle et donc plus l'écart type est réduit. Ainsi avec $\epsilon = 0.1$ il est de l'ordre de 10^{-2} , avec $\epsilon = 0.001$ il est de l'ordre de 10^{-4} , et avec $\epsilon = 0.0001$ il est de l'ordre de 10^{-5} .