

Séance 2 : Comment fonctionne votre calculatrice scientifique ?

PERROT Sébastien

MEYNIER Vincent

CPI I B

Problème 5 : En utilisant la théorie des séries entières et en particulier des séries de Taylor, trouver un moyen de calculer les valeurs suivantes :

$$e^{1.37}, \sin(0.21466), \cos(0.21466), \ln(1.338), \sqrt[3]{1.34}, (1.2)^{1.3}$$

Pour résoudre ce type de question, nous utiliserons le logiciel Scilab, vu et étudié lors la première séance de TP. Nous reprendrons le code de la dernière soutenance, en l'adaptant à notre cas. En page 8 se trouvera le code Scilab que nous avons appliqué afin de résoudre cet exercice.

Calcul de $e^{1.37}$:

Afin de déterminer la valeur de $e^{1.37}$, nous utiliserons la méthode des séries entières : c'est-à-dire que nous décomposerons la fonction e^x en DSE. Nous nous retrouverons ainsi face à une série, que nous pourrions implémenter dans Scilab (notre calculatrice scientifique suit le même cheminement que le code Scilab se trouvant en page 8).

DES de e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Pour notre étude, le « x » sera remplacé par 1.37.

Il nous faut déterminer le premier élément de la série a_0 . Une fois celui-ci trouvé, on détermine un ε (pour nous, ce sera, 0.0001, 0.001 et 0.1) qui nous donnera ainsi la précision du calcul. On pose $N = 0$. On crée une boucle « Tant que » tel que l'élément a_{n+1} soit inférieur à ε . Si cette condition est respectée, alors notre élément de série deviendra : (notre premier élément de série (a_0)) + (l'élément a_{n+1}).

Pour schématiser ceci :

```
S = a0
n = 0
Tant que |an+1| > ε {
    S = S + an+1
    n = n+1
}
```

Ainsi en suivant ce schéma, on trouve les valeurs suivantes :

- Pour $\varepsilon = 0.0001$, $a_0 = \frac{1.37^0}{0!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$e^{1.37} = 3.9352965$$

La différence entre la valeur réelle de $e^{1.37}$ et notre calcul (grâce aux série entières) est de :

$$\text{Diff} = -0.0000542$$

- Pour $\varepsilon = 0.001$, $a_0 = \frac{1.37^0}{0!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$e^{1.37} = 3.9349887$$

La différence entre la valeur réelle de $e^{1.37}$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = -0.0003620$$

- Pour $\varepsilon = 0.1$, $a_0 = \frac{1.37^0}{0!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$e^{1.37} = 3.8837902$$

La différence entre la valeur réelle de $e^{1.37}$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = -0.0515605$$

Calcul de $\sin(0.21466)$:

Nous suivons le même cheminement que précédemment en utilisant le DES de $\sin x$.

DES de $\sin(x)$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Pour notre étude, le « x » sera remplacé par 0.21466.

Ici, $a_0 = 0.21466$ et $n = 0$.

- Pour $\varepsilon = 0.0001$, $a_0 = \frac{(-1)^0 x^{2*0+1}}{(2*0+1)!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\sin 0.21466 = 0.2130114$$

La différence entre la valeur réelle de $\sin 0.21466$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = 0.0000038$$

- Pour $\varepsilon = 0.001$, $a_0 = \frac{(-1)^0 x^{2*0+1}}{(2*0+1)!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\sin 0.21466 = 0.2130114$$

La différence entre la valeur réelle de $\sin 0.21466$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = 0.0000038$$

- Pour $\varepsilon = 0.1$, $a_0 = \frac{(-1)^0 x^{2*0+1}}{(2*0+1)!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\sin 0.21466 = 0.21466$$

La différence entre la valeur réelle de $\sin 0.21466$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = 0.0016448$$

Calcul de $\cos(0.21466)$:

Nous suivons le même cheminement que précédemment en utilisant le DES de $\sin x$.

DES de $\cos(x)$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Pour notre étude, le « x » sera remplacé par 0.21466.

Ici, $a_0 = 1$ et $n = 0$.

- Pour $\varepsilon = 0.0001$, $a_0 = \frac{(-1)^0 x^{2*0}}{(2*0)!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\cos 0.21466 = 0.9769605$$

La différence entre la valeur réelle de $\cos 0.21466$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = -0.0000883$$

- Pour $\varepsilon = 0.001$, $a_0 = \frac{(-1)^0 x^{2*0}}{(2*0)!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\cos 0.21466 = 0.9769605$$

La différence entre la valeur réelle de $\cos 0.21466$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = -0.0000883$$

- Pour $\varepsilon = 0.1$, $a_0 = \frac{(-1)^0 x^{2*0}}{(2*0)!} = 1$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\cos 0.21466 = 1$$

La différence entre la valeur réelle de $\cos 0.21466$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = 0.022954$$

Calcul de $\ln(1.338)$:

Nous suivons le même cheminement que précédemment en utilisant le DES de $\sin x$.

DES de $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Pour notre étude, le « x » sera remplacé par 0.338.

Ici, $a_0 = 0.338$ et $n = 1$.

- Pour $\varepsilon = 0.0001$, $a_0 = \frac{(-1)^{1+1} * 0.338^1}{1} = 0.338$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\ln 1.338 = 0.2911203$$

La différence entre la valeur réelle de $\ln 1.338$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = 0.0000556$$

- Pour $\varepsilon = 0.001$, $a_0 = \frac{(-1)^{1+1} * 0.338^1}{1} = 0.338$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\ln 1.338 = 0.2904866$$

La différence entre la valeur réelle de $\ln 1.338$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = 0.0006894$$

- Pour $\varepsilon = 0.1$, $a_0 = \frac{(-1)^{1+1} * 0.338^1}{1} = 0.338$

Le programme dans Scilab nous donne la valeur suivante :

$$\ln 1.338 = 0.338$$

La différence entre la valeur réelle de $\ln 1.338$ et notre calcul (grâce aux séries entières) est de :

$$\text{Diff} = 0.0468240$$

Voici un tableau récapitulatif des valeurs trouvées :

$\begin{matrix} \epsilon \\ f(x) \end{matrix}$	0.0001	0.001	0.1
$e^{1.37}$	3.9352965	3.9349887	3.8837902
	Diff = -0.0000542	Diff = -0.0003620	Diff = -0.0515605
$\sin(0.21466)$	0.2130114	0.2130114	0.21466
	Diff = 0.0000038	Diff = 0.0000038	Diff = 0.0016448
$\cos(0.21466)$	0.9769605	0.9769605	1
	Diff = -0.0000883	Diff = -0.0000883	Diff = 0.022954
$\ln(1.338)$	0.2911203	0.2904866	0.338
	Diff = -0.0000556	Diff = -0.0006894	Diff = -0.0468240

Voici le code implémenté dans le logiciel Scilab. Ici c'est le code pour calculer la valeur de $\sqrt[3]{1.34}$

```
function a=elementSerie_exp(n,x)
    a=((x)^(n+1))/(factorielle(n+1));
endfunction

function a=elementSerie_sin(n,x)
    a=(((-1)^(n))*(x^((2*n)+1)))/(factorielle((2*n)+1));
endfunction

function a=elementSerie_cos(n,x)
    a=(((-1)^(n))*(x^(2*n)))/(factorielle(2*n));
endfunction

function a=elementSerie_ln(n,x)
    a=(((-1)^(n+1))*(x^n))/n;
endfunction

function p=produit_alpha(alpha, n)
    p=alpha;
    for i=1:1:n
        p=p*(alpha-i);
    end
endfunction

function a=elementSerie_racine(n,x)
    haut=produit_alpha(1/3, n);
    a=(haut*(x^n))/factorielle(n);
endfunction

function s=sommePartielle(N)
    s=0;
    for i=1:1:N
        s=s+elementSerie(i);
    end
endfunction

function f=factorielle(n)
    f=1;
    for i=1:1:n
        f=f*i;
    end
endfunction

function s=calcul(x,eps)
    s=elementSerie_racine(1, x);
    n=1
    while (abs(elementSerie_racine(n+1, x)) > eps)
        s=s+elementSerie_racine(n+1, x);
        n=n+1;
    end
endfunction

s=calcul(1.34, 0.0001)
rl=s-((1.34)^(1/3))
```