

I. Problème

Nous cherchons à trouver la valeur approchée la plus exacte possible de : $e^{1.37}$, $\sin(0.21466)$, $\cos(0.21466)$, $\ln(1.338)$, $\sqrt[3]{1.34}$, $(1.2)^{1.3}$ en utilisant seulement les 4 opérations de base : addition, soustraction, multiplication et division. Pour y parvenir, nous avons choisi d'utiliser le développement en série entière des fonctions e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$, et $(1+x)^\alpha$:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

En effet, ces développements permettent de calculer une valeur approchée grâce aux opérations élémentaires uniquement. Mais, l'infini étant inatteignable, il faut trouver une solution pour que la somme s'arrête à un rang N suffisamment grand pour que la valeur approchée que nous obtiendrons soit valable. Pour se faire, nous devons utiliser une fonction qui compare la valeur absolue du $n^{\text{ième}}$ élément de la série par rapport à un ε très petit. Si ε est plus grand que le $n^{\text{ième}}$ élément de la série, alors on considère que la somme partielle jusqu'au $n^{\text{ième}}$ élément est suffisamment approchée et que donc la somme partielle jusqu'au $n^{\text{ième}}$ élément de la série est un résultat avec un faible écart de la valeur réelle. Plus ε est petit, plus la différence avec la valeur réelle sera négligeable.

Néanmoins, ces développements ne sont valables qu'en 0, donc il y aura parfois une petite différence due au fait que les valeurs de x que nous allons appliquer s'approchent plus ou moins de 0.

II. Méthode utilisée

Pour calculer ces séries, nous avons créé plusieurs fonctions dans Scilab :

-La fonction `elementSerie` qui prend en paramètre x et n où n est le rang du terme de la série. Cette fonction renvoie le $n^{\text{ième}}$ élément de la somme associé au calcul.

-La fonction `sommePartielle`, qui prend en paramètre un rang N et x, et renvoie la somme partielle de la série donnée de 0 ou 1 à N suivant les cas. Elle nous permet d'approcher la valeur finale de la série si N est suffisamment grand.

-La fonction *sommetotale*, qui prend en paramètre x et ε , vérifie la condition d'arrêt, c'est-à-dire que ε doit être plus grand que le $n^{\text{ième}}$ élément. Elle renvoie le résultat de la somme partielle jusqu'au rang vérifiant la condition d'arrêt.

-La fonction *Test* est la fonction que l'on appelle dans la console. C'est dans celle-ci que l'on donne la valeur de x , de ε et de la différence entre la valeur exacte donnée par *scilab* et celle que nous avons trouvé.

Aussi, nous du créer d'autres fonctions comme *ValeurAbsolue*, *Factorielle*, et *Produit* qui retournent respectivement la valeur absolue d'un nombre, la factorielle d'un nombre, et le produit $\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)$ en fonction de α et n .

III. Résultats

Nous avons regroupé nos résultats dans un tableau de manière à pouvoir les exploiter plus facilement.

Expression à calculer	Valeur réelle	Avec $\varepsilon = 0.1$	Ecart type ($\varepsilon = 0.1$)	Avec $\varepsilon = 0.001$	Ecart type ($\varepsilon = 0.001$)	Avec $\varepsilon = 0.0001$	Ecart type ($\varepsilon = 0.0001$)
$e^{1.37}$	3.9353507	3.8837902	5.15605×10^{-2}	3.9349887	3.62×10^{-4}	3.9352965	5.42×10^{-5}
$\sin(0.21466)$	0.2130152	0.21466	1.6448×10^{-3}	0.2130114	3.8×10^{-6}	0.2130114	3.8×10^{-6}
$\cos(0.21466)$	0.9770489	0.976842	2.069×10^{-4}	0.9769605	8.84×10^{-5}	0.9769605	8.84×10^{-5}
$\ln(1.338)$	0.2911760	0.338	4.6824×10^{-2}	0.2904866	6.894×10^{-4}	0.2911203	5.57×10^{-5}
$\sqrt[3]{1.34}$	1.1024738	1.1259259	2.34521×10^{-2}	1.1259259	2.34521×10^{-2}	1.1259259	2.34521×10^{-2}
$(1.2)^{1.3}$	1.267464	1.26	7.464×10^{-3}	1.2678	3.36×10^{-4}	1.267567	1.03×10^{-4}

Nous pouvons observer que les valeurs que nous avons obtenue en fonction des différents ε que nous avons pris. Plus le ε est petit, plus la valeur que nous avons trouvé s'approche de la valeur réelle. En effet, avec un $\varepsilon = 0.1$, l'écart type est de l'ordre de 10^{-2} en général, de 10^{-4} avec $\varepsilon = 0.001$ et de 10^{-5} avec $\varepsilon = 0.0001$.