

BOUARFA Souleyman

GARNIER Xavier

CPI2-B.

Compte rendu 1 : Mathématiques ingénieur

Séance 2, fonctionnement de notre calculatrice.

Lors de cette séance, on nous a demandé, en utilisant la théorie des séries entières et en particulier des séries de Taylor de trouver un moyen de calculer les valeurs suivantes : $\exp(1.37)$, $\sin(0.21466)$, $\cos(0.21466)$ et $\ln(1.338)$. Autrement dit, il nous a fallu créer plusieurs fonctions permettant de calculer ces valeurs.

Conception des fonctions :

Dans un premier temps, afin de pouvoir calculer les valeurs données, nous avons dû retrouver les valeurs des développements en séries entières du sinus, cosinus, exponentielle ainsi que logarithme. Voici un rappel de ces DES(0) :

f	D_f	DSE	R	I
e^x	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1-x)$	$] -\infty, 1[$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1[$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$	1	$] -1, 1]$
$(1+x)^a$	$] -1, +\infty[$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n$	1 ou $+\infty$ ($a \in \mathbb{N}$)	

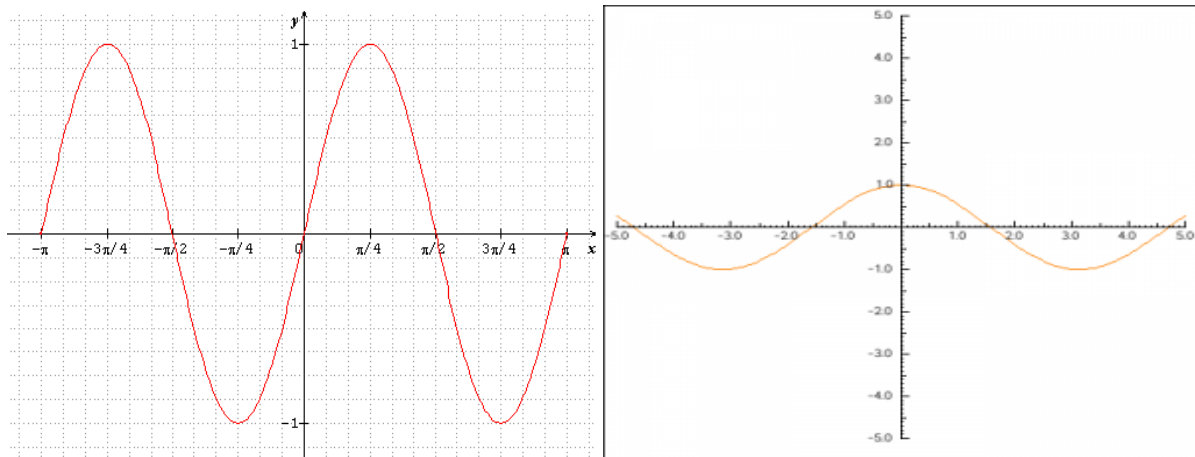
Dans un second temps, nous avons dû créer les fonctions qui nous permettent de calculer ces valeurs. Nous avons commencé par créer la fonction puissance qui comme son nom l'indique permet de calculer la puissance d'un nombre donnée. Cette fonction reste très utile pour le calcul des DES(0) pour un x et n donnée. Nous avons ensuite créé la fonction factorielle, fonction très importante qui va nous permettre de calculer comme son nom l'indique, la factorielle d'un nombre x donnée. Cette fonction commence par 1, puisque par convention, $0! = 1$. Ensuite pour $x > 0$, on crée une boucle « for » pour que la fonction se répète. Après avoir créé ces deux fonctions qui vont nous être utiles, nous utilisons les formules données en annexe ci-dessus afin de calculer les valeurs indiquées précédemment. Pour commencer, nous avons créé la fonction exponentielle : on sait que le DES(0) de la fonction exp est la somme de $x^n/n!$ avec n allant de 0 à l'infini. De ce fait, sachant cela, on commence par créer la fonction qui nous permet de calculer $x^n/n!$. Ensuite, on a construit la fonction expo(x, n) qui utilise le calcul précédent et où on met en place la boucle « while » qui va permettre de calculer pour un nombre x donné et n la valeur précise de l'exponentielle souhaitée avec une précision dépend d'un epsilon donné. La valeur epsilon va en quelque sorte donner plus de précision aux résultats souhaités. Plus epsilon est petit et plus la valeur voulue se rapproche du résultat réel. Dans notre cas, nous avons testé pour epsilon les valeurs suivantes : 0.1 ; 0.001 et 0.0001, ce qui nous a amené à remarquer une différence qu'on explicitera par la suite. Concernant les autres fonctions voulues, tels que cos, sin et log, la démarche est la même que pour la fonction exponentielle si ce n'est le fait de changer le DES(0) des fonctions ainsi que leur domaine de définition. À noter que les fonctions créées sont jointes dans le fichier « tp1mathing.sci ».

Comme vu précédemment, pour chaque valeur testée, c'est-à-dire pour exp(1.37), sin(0.21466), ln(1.338) et cos(0.21466), nous avons donné de plus en plus de précision à notre résultat en lui affectant un epsilon de plus en plus petit (0.1 puis 0.001 puis 0.0001). Nous avons ensuite pour chaque valeur calculée avec un epsilon, comparé notre valeur avec la valeur réel du logiciel (calculé comme suit $Dexp1 = \text{abs}(\exp(1.37) - \text{testexp1})$ pour la fonction exponentielle par exemple). Voici le résultat pour chaque calcul, sachant que le nom de nos fonctions sont testexp = expo(x, eps), testcos = cosinus(x, eps), testsin = sinus(x, eps) et testlog = loga(x, eps) :

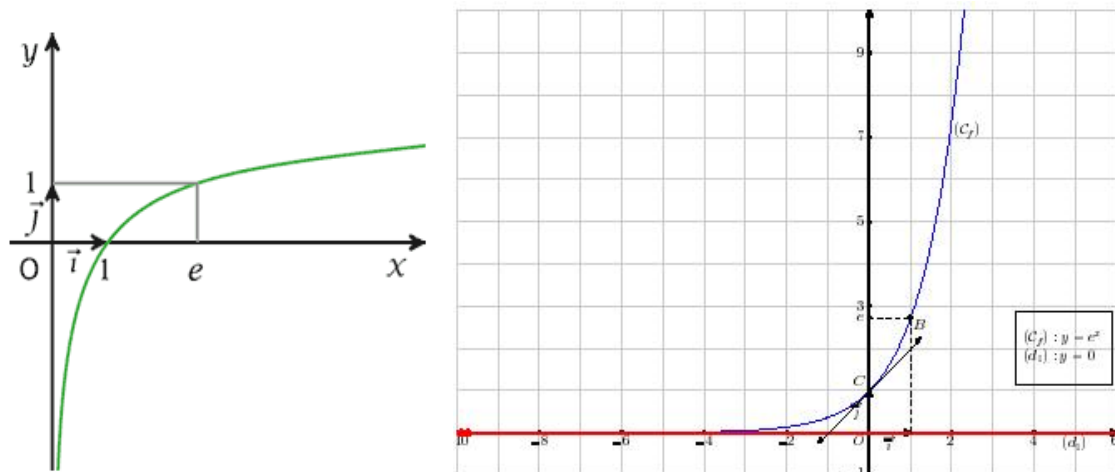
Fonction exponentielle	Fonction sinus	Fonction cosinus	Fonction logarithme
testexp1=3.8837902	testsin1 = 0.21466	testcos1 = 1	testlog1 = 0.338
testexp2=3.9349887	testsin2 =0.2130114	testcos2 = 0.9769605	testlog2 = 0.2904866
testexp3=3.9352965	testsin3 =0.2130114	testcos3 = 0.9769605	testlog3 = 0.2911203
Dexp1 = 0.0515605	Dsin1 = 0.0016448	Dcos1 = 0.0229511	Dlog1 = 0.0468240
Dexp2 = 0.0003620	Dsin2 = 0.0000038	Dcos2 = 0.0000883	Dlog2 = 0.0006894
Dexp3 = 0.0000542	Dsin3 = 0.0000038	Dcos3 = 0.0000883	Dlog3 = 0.0000556

Nous avons vu que plus epsilon était petit est plus la valeur cherché était proche de la valeur exacte donné par le logiciel. En effet, il est facile de voir ça, puisque lorsqu'on calcul la différence entre la valeur trouvé et celle donné par le logiciel (i.e Dexp...), on observe bien que l'écart est de plus en plus petit lorsqu'on diminue notre epsilon, qui on le rappel vaut 0.1 ; 0.001 et 0.0001.

Cependant, on remarque que, pour certaines fonctions tels que la fonction sinus et cosinus, qu'à partir d'epsilon = 0.001, la valeur voulu ne change plus. Tandis que pour d'autre, en l'occurrence la fonction exponentielle et logarithme, plus la valeur epsilon diminue et plus on s'approche du résultat donné par le logiciel. Cette différence s'explique par le fait que les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont des fonctions sinusoïdale avec une certaine période, elle se répète donc au cours des valeurs de x , ce qui n'est pas le cas avec les fonctions expo et ln qui elles sont nettement différentes puisque graphiquement, en fonctions des valeurs de x , $\exp(x)$ tend vers plus l'infini lorsque x tend vers plus l'infini et tend vers moins 0 lorsque x tend vers moins l'infini. De même pour la fonction $\ln(x)$ qui tend vers plus l'infini lorsque x tend vers plus l'infini et moins l'infini lorsque x tend vers moins l'infini.



Fonctions sinus et cosinus.



Fonctions logarithme et exponentielle.